المادة محاضرات مودولات ٢

الفصل   الثاني

المرحلة الرابعة

القسم   الرياضيات

الكلية   التربية للعلوم الصرفة

الجامعة الانبار

المحاضرة الاولى

الفصل الرابع

المودولات النيوترية والأرتينية

4 – 1 تمهيد

إن مفهوم الاستقراء الرياضي بالنسبة إلى $\mathbb{Z}$ – مودولات بحسب رتب هذه المودولات هو أداة هامة وقوية. أما بالنسبة إلى R – مودولات من نمط منته، فإن الأداة الهامة هي شرط السلسلة أو ما يكافئ هذا الشرط يلعب هذا الدور. نبدأ بالتعريف.

تعريف 1.1.4: لتكن Γ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً بالعلاقة $\leq$. عندئذ:

(1) نقول أن السلسلة المتزايدة:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \qquad (1)$$

تتقطع إذا وجد n_0 بحيث يكون $a_m = a_n$ من أجل كل $n_0 \leq n,m$، إذا كانت كل سلسلة متزايدة في Γ منقطعة، فإننا نقول إن Γ تحقق شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.).

(2) نقول أن Γ تحقق شرط الأعظمية إذا كانت كل مجموعة جزئية في Γ تحوي عنصراً أعظمياً.

لنبرهن الفرضية الآتية.

فرضية 2.1.4: لتكن Γ مجموعة مرتبة ترتيباً جزئياً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) Γ تحقق .a.c.c.

(2) كل سلسلة متزايدة تماماً منتهية إذا كانت:

$$a_1 < a_2 < \cdots \qquad (1)$$

سلسلة متزايدة تماماً في Γ، فإنها تحوي عدداً محدود من الحدود.

(3) Γ تحقق شرط الأعظمية: كل مجموعة خالية في Γ تحوي عنصراً أعظمياً.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): واضح جدا.

(2) $\Leftarrow$ (3): لتكن S مجموعة جزئية غير خالية في Γ، وليكن $S \ni a$. إذا لم يكن a_1 أعظميا في S، فإنه يوجد $S \ni a_2$ بحيث يكون $a_1 < a_2$. وبشكل عام، من أجل كل $S \ni a_n$، إما أن يكون a_n أعظميا، وإما أن يوجد $S \ni a_{n+1}$ بحيث يكون $a_n < a_{n+1}$. عندئذ نحصل على السلسلة (2) التي يجب أن تنقطع بحسب الفرضية (2)، والعنصر الأخير الذي تنقطع عنده السلسلة هو العنصر الأعظمي في S.

(3) $\Leftarrow$ (1): إذا أعطينا السلسلة (1)، نأخذ المجموعة $\{a_1, a_2, \cdots\}$. لتكن a_m عنصرا أعظميا فيها. عندئذ، $a_m = a_n$ من أجل كل $m \leq n$. إذا، $a_m = a_m + i$، من أجل كل $\mathbb{N} \ni i$. □

نلاحظ أن فرضية (مبدأ، بديهية) الاختيار استخدمت عند اقتضاء (2) $\Leftarrow$ (3)؛ يمكن بيان أنه لا يمكن الاستغناء عن ذلك. إذا، بدون شرط الاختيار يكون شرط الأعظمية أقوى من شرط السلسلة المتزايدة، ولكن عند وجود هذا المبدأ يكافئ أحد الشرطين (2) و (3) ، الآخر.

هناك مبدأ استقراء مفيد جدا يطبق على المجموعات التي تحقق شرط الأعظمية.

فرضية 3.1.4 (الاستقراء النيوتري): لتكن Γ مجموعة مرتبة جزئياً تحقق شرط الأعظمية. إذا كانت S مجموعة جزئية في Γ تحوي أي عنصر $\Gamma \ni a$ عندما تحوي كل العناصر $\Gamma \ni x$ حيث $a < x$، فإن $S = \Gamma$.

البرهان: لتكن T متممة S في Γ. لنفرض أن $T \neq \phi$، وليكن t عنصراً أعظمياً في T. عندئذ كل $t < x$ يجب أن يكون من S. وبحسب الفرض، يجب أن يكون $t \in S$ وهذا تناقض لأن $t \in \Gamma$ و $T \cap S = \phi$، إذاً، $T = \phi$ و $\Gamma = S$. □

بحسب المثنوية، أي بعكس الترتيب، نستطيع تعريف شرط المتناقصة (.d.c.c)، أي شرط الأصغرية بنفس الطريقة، وكما في الفرضية 3.1.4، نحصل على مبدأ الاستقراء بالنسبة إلى المجموعة التي تحقق شرط الأصغرية.

من الواضح أن كل مجموعة منهية ومرتبة تحقق شرطي الأعظمية والأصغرية كليهما، لكن العكس ليس صحيحا، كما يتبين من مجموعة لانهائية، كل عناصرها يمكن مقارنتها بعضها ببعض.

والآن نطبق هذه الأفكار العامة والمجردة على شبكة المودولات الجزئية في R – مودول M. وهذا موضوع البند الآتي الذي يناقش بشكل موجز نوعين من المودولات: النيوترية والأرتينية.

4 – 2 المودولات النيوترية والأرتينية

لتكن R حلقة و R M – مودولا. إذا كانت مجموعة المودولات الجزئية في M تحقق .a.c.c، فإننا نقول أن M مودول نيوتري. وإذا كانت مجموعة المودولات الجزئية في M تحقق شرط .d.c.c، فإننا نقول إن M مودول أرتيني. وإذا طبقنا هذه المنهجية على الحلقة R باعتبارها – مودولاً، فإننا نحصل على مفهوم الحلقة النيوترية ومفهوم الحلقة الأرتينية.

أول من استخدم شرط .a.c.c العالمة الألمانية Emmy Noether (1935 –1880) وأول من استخدم .d.c.c هو العالم Emil Artin (1962 – 1898). إن مبدأ الأعظمية بالنسبة إلى المودولات يمكن صياغته بطريقة أخرى. نبدأ من البداية.

تعريف 1.2.4: ليكن R M – مودولاً، و $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M، إذا كان:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \qquad (1)$$

فإننا نقول أن الأسرة $(M_i)_{i\in I}$ تشكل سلسلة متزايدة أو صاعدة. وإذا وجد n_0 بحيث يكون $M_{n_0} = M_{n_0+i}$ من أجل $i \in \mathbb{N}$، فإننا نقول إن السلسلة (1) متقطعة عند الحد M_{n_0} أو أنها تحقق شرط السلسلة المتزايدة.

إذا كانت كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M متقطعة، فإننا نقول إن M يحقق شرط السلسلة المتزايدة a.c.c.

نظرية 2.2.4: يكون R – مودول M نيوترياً عندما وفقط عندما كل مودول جزئي في M منتهي التوليد. وبشكل خاص M منتهي التوليد.

البرهان: نفرض أن M مودول نيوتري، وليكن $N \subseteq M$ مودولاً جزئياً. نختار العناصر $x_1, x_2, \cdots$ من N، وليكن $N_i = < x_1, \cdots, x_{i-1} >$، بحيث يكون $x_i \notin N_i$. عندئذ، نحصل على السلسلة المتزايدة:

$$<0> = N_1 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots$$

هذه السلسلة يجب أن تتقطع عند الحد N_r، مثلاً. عندئذ، $N = N_r$ و N منتهي التوليد.

بالعكس، نفرض أن كل مودول جزئي في M منتهي التوليد. لتكن:

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M. عندئذ، $N = \sum_i M_i$ مودول جزئي في M منتهي التوليد، مثلا $N = < x_1, \cdots, x_r >$. يوجد دليل ما n بحيث يكون $x_i \in M_n$ من أجل كل $1 \le i \le r$ [إذا كان $x_i \in M_{n_i}$، نختار n بالشكل $n = \max\{n_1, \cdots, n_r\}$ فنجد المطلوب]. وبالتالي $N = M_n$ والسلسلة تتقطع عند الحد M_n و M نيوتري. □

بسبب النظرية 2.2.4، تكون المودولات النيوترية أكثر أهمية من المودولات الأرتينية: إن شرط النيوترية هو تماماً شرط الانتهاء، الذي يجعل كثير من النظريات

تأخذ مفعولها. ومع ذلك فإن كثيراً من الخواص الأساسية تطبق بالتوازي على المودولات النيوترية والمودولات الأرتينية.

إذا كانت الحلقة R نيوترية (أرتينية)، فإن R – مودول دوري (كونه من الشكل R/I من أجل إيديال ما I في R) هو أيضاً نيوتري (أرتيني، على الترتيب). لوجود تقابل 1-1 بين المودولات الجزئية في R والتي تحوي I وبين المودولات الجزئية في R/I بحسب نظرية التقابل، ونستطيع أن نقول أكثر من ذلك.

نظرية 3.2.4: لتكن R حلقة نيوترية (أرتينية). كل R – مودول منتهي التوليد هو نيوتري (أرتيني، على الترتيب).

البرهان: ليكن $M=<x_1,\cdots,x_n>$، وليكن $M'=<x_1,\cdots,x_{n-1}>$ مودولاً جزئياً في M. عندئذ، $M''=M/M'$ دوري، ولدينا المتوالية الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

في هذه المتوالية، M' يحقق شرط الأعظمية بحسب الفرض بالاستقراء، و M'' يحقق شرط الأعظمية لأنه دوري.

لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة مودولات جزئية في M ولتكن $(\bar{M}_i)_{i\in N}$ الأسرة المقابلة لها في M'' وفق الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi: M \to M/M'$، وليكن $\bar{N}$ عنصرها الأعظمي. عندئذ يكون $N=\varphi^{-1}(\bar{N})$ عنصرا أعظميا للأسرة $(M_i)_{i\in N}$.

البرهان: في حالة الأرتينية مشابه. □

في ساحة الإيديالات الرئيسة كل إيديال منتهي التوليد. فهي حلقة نيوترية، وبالتالي:

نتيجة 4.2.4: كل مودول منتهي التوليد فوق ساحة إيديالات رئيسة هو مودول نيوتري.

إذا كان M R – مودولاً نيوترياً فكل مودول جزئي فيه منتهي التوليد، وبشكل خاص M نفسه منتهي التوليد، وإذا كانت الحلقة R نيوترية، فإن هذا الشرط يكفي أيضاً.

وعندئذ، نحصل على النتيجة الهامة المعروفة جيداً وهي أن مودول منتهي التوليد فوق حلقة نيوترية هو مودول نيوتري، فيما يلي نعطي برهان هذه النتيجة في صيغة أكثر عمومية.

نظرية 5.2.4: لتكن R حلقة و $R\,M$ – مودولاً:

(1) ليكن $M \supseteq M'$ مودولاً جزئياً و $\varphi : M \to M/M'$ الإسقاط الطبيعي إذا كان N_1 و N_2 مودولين جزئيين في M، حيث $N_2 \supseteq N_1$، $N_1 \cap M' = N_2 \cap M'$ و $\varphi(N_1) = \varphi(N_2)$ فإن $N_1 = N_2$.

(2) لتكن $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ متوالية صحيحة من R – مودولات. إذا كان M' و M'' كلاهما نيوتريين (أرتينيين) فإن M كذلك.

(3) إذا كان $R\,M$ – مودولاً منتهي التوليد، وإذا كانت R حلقة نيوترية (أرتينية)، فإن M كذلك.

البرهان: (1): ليكن $N_2 \ni y$ عنصراً كيفياً. عندئذ، $\varphi(y) \in \varphi(N_1) = \varphi(N_2)$. إذاً، يوجد $N_1 \ni x$ بحيث يكون $\varphi(x) = \varphi(y_1)$، وبالتالي $\varphi(y - x) = 0$ أو $y - x \ni \mathrm{Ker}\varphi = M'$. إذاً:

$$y - x \in N_2 \cap M' = N_1 \cap M' \ , \ (x, y \in N_2,\ N_1 \subseteq N_2)$$

إذاً، $N_1 \ni x, y$ و $N_1 \ni y$ لأن $N_1 \ni x$.

(2): ينتج مباشرة بتطبيق (1) على سلسلة متزايدة (متصاعدة على الترتيب) من مودولات جزئية في M.

(3): إذا كان M مودولاً بـــ n عنصراً، فإن M هو الصورة الهومومرفية لـــ R^n، وبالتالي يكفي بيان أن R^n نيوتري (أرتيني على الترتيب). ولكن ذلك ينتج مباشرة من (2). □

كل مودول منتهي التوليد فوق حلقة ما يتمتع بخاصة الأعظمية الهامة الآتية، والتي تنتج من فرضية زورن.

فرضية 6.2.4: ليكن M R – مودولاً منتهي التوليد. عندئذ، كل مودول جزئي خاص في M محتوى في مودول جزئي خاص أعظمي.

البرهان: ليكن $M=<x_1,\cdots,x_n>$ وليكن N مودولاً جزئياً في M. لتكن Γ مجموعة كل المجموعات الجزئية X في M والتي تولد مع N مودولاً جزئياً خاصاً في M. إن المجموعة الجزئية $X_1 \notin \Gamma$ عندما تكون العناصر $x_1,\cdots,x_n$ جميعها تراكيب خطية لعناصر من X_1 ومن N، وهذا الشرط يحققه فقط عدد محدود من العناصر من X_1. إذاً، $X_1 \in \Gamma$ تماماً عندما تنتهي كل مجموعاتها الجزئية المنتهية إلى Γ، وبالتالي Γ ذات هوية منتهية. إذاً، توجد مجموعة جزئية أعظمية X في Γ، يكون المودول الجزئي المولد بـــ $N \cup X$ ثانية من Γ، وبسبب أعظمية X في Γ، فإن $X=<N \cup X>$. إذا $X \supseteq N$. □

هذه النتيجة تطبق على الحلقة R نفسها باعتبارها R – مودولا. إن R مولدة بعنصر وحيد 1، والمودولات الجزئية فيه هي الإيديالات. والإديال الأعظمي (يساري، يميني – ثنائي الجانب) في R هو العنصر الأعظمي في مجموعة كل من الإدیالات (اليسرى، اليمنى، ثنائية الجانب، على الترتيب). وبذلك نحصل على النتيجة الهامة الآتية.

نظرية 7.2.4 (نظرية كرول): لتكن R حلقة ما. كل إيديال خاص في R محتوى في إيديال أعظمي. وبشكل خاص، كل حلقة غير تافهة (صفرية) تحوي إيديالاً أعظمياً.

البرهان. □

هذه النظرية ذات أهمية عظمى لبرهان وجود واحدات في حلقة R بواحدة 1. في حال عدم وجود واحدة في R، فليس لها معنى.

إن مثنويّي شرط السلسلة المتزايدة وشرط الأعظمية هما شرطا السلسلة المتناقصة وشرط الأصغرية. لقد عرفنا المودول النيوتري بأنه المودول الذي يحقق أحد الشرطين

المتكافئين: شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.) وشرط الأعظمية (انظر الفرضية 2.1.4)، والمودول الأرتيني هو المودول الذي يحقق شرط السلسلة المتناقصة (الهابطة) (d.c.c.). لنبرهن الآن تكافؤ شرط السلسلة المتناقصة مع شرط الأصغرية.

فرضية 8.2.4: من أجل كل R – مودول M، الشرطان الآتيان متكافئان:

(1) M يحقق شرط السلسلة المتناقصة (d.c.c.)، أي أن M أرتيني.

(2) M يحقق شرط الأصغرية (كل مجموعة من المودولات الجزئية في M تحوي عنصراً أصغرياً).

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): لتكن Γ مجوعة غير خالية من المودولات الجزئية في M. نختار $M_0 \in \Gamma$. إذا لم يكن M_0 أصغرياً في Γ، فإنه يوجد $M_1 \in \Gamma$ بحيث يكون $M_0 \supsetneq M_1$. هذه المناقشة تؤدي إلى السلسة المتناقصة:

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

من المودولات الجزئية في M. بحسب (1) يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$، بحيث يكون $M_{n_0+i} = M_{n_0}$ من أجل كل $i \in \mathbb{N}$، والذي هو عنصر أصغري في Γ.

(2) $\Leftarrow$ (1): لنفرض أن M لا يحقق شرط (d.c.c.). عندئذ، توجد في M سلسلة متناقصة لانهائية من المودولات الجزئية:

$$M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots$$

عندئذ، أسرة المودولات $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ لا تحوي عنصراً أصغرياً. وهذا تناقض مع (2). □

ملاحظة 9.2.4: من الفرضية 2.1.4، ومن النظرية 2.2.4 معا نخلص إلى النتيجة الآتية: يكون $R\ M$ – مودولاً نيوترياً إذا تحقق أحد الشروط الثلاثة المتكافئة الآتية:

(1) M يحقق شرط السلسلة المتزايدة؛

(2) M يحقق شرط الأعظمية؛

(3) كل مودول جزئي في M منتهي التوليد.

وقد وجدنا أن المودول الأرتيني هو مثنّوي المودول النيوتري، بمعنى ما:

المودول الأرتيني	المودول النيوتري
a′. شرط السلسلة المتناقصة (d.c.c.)	a. شرط السلسلة المتزايدة (a.c.c.)
b'. شرط الأصغرية.	b. شرط الأعظمية.
c′. كل عامل مودول منتهي التوليد.	c. كل مودول جزئي منتهي التوليد

لقد برهنا تكافؤ الشرطين a′ و b′ (الفرضية 8.2.4). لنبرهن الآن تكافؤ الشرطين a′ و c′. عندئذ، تصبح الشروط الثلاثة متكافئة.

نظرية 10.2.4: يكون R – مودول M أرتينياً $\Leftrightarrow$ كل عامل مودول M/N منتهي التوليد من أجل كل مودول جزئي N في M.

البرهان: $\Rightarrow$: نفرض العكس، أي نفرض أن M/N غير مولد مجموعة منهية، وليكن $\bar{X}=(\bar{x}_i)_{i\in I}$ أصغر مجموعة مولدة لـ $\bar{M}=M/N$. لتكن $I\supseteq I_n$ مجموعة جزئية مؤلفة من n عنصراً. ليكن:

$$\bar{M}_j=\langle(x_i)_{i\in I-I_j}\rangle$$

عندئذ، نحصل في $\bar{M}=M/N$ على السلسلة المتناقصة اللانهائية:

$$\bar{M}=\bar{M}_0\supsetneq\bar{M}_1\supsetneq\bar{M}_2\supsetneq\cdots$$

ليكن $M_i=\varphi^{-1}(\bar{M}_i)$ الصورة العكسية لـ $\bar{M}_i$ بالنسبة إلى الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi:M\to M/N$. عندئذ، نحصل في M على السلسلة المتناقصة اللانهائية:

$$M=M_0\supsetneq M_1\supsetneq M_2\supsetneq\cdots$$

وغير متقطعة. وهذا يناقض أن M يحقق الشرط (d.c.c.).

$\Leftarrow$: لتكن:

$$M_0\supseteq M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots \tag{3}$$

سلسلة متناقصة من المودولات الجزئية في M، وليكن $\bar{M}_i=\varphi(M_i)$، حيث φ هو

الهومومرفيزم الطبيعي $\varphi: M \to M/N$. عندئذ، نحصل في M على السلسلة المتناقصة:

$$\bar{M}_0 \supseteq \bar{M}_1 \supseteq \bar{M}_2 \supseteq \cdots$$

ولكن $\bar{M}_i = \varphi(M_i) = M_i / N$ منهي التوليد من أجل كل $i \in \mathbb{N}$. نفرض أن $\bar{M}_0$ مولد بـــ m عنصرا. عندئذ، $\bar{M}_k = \langle 0 \rangle$ من أجل كل $m < k$. إذاً، $\bar{M}_k = \langle 0 \rangle$، وبالتالي $M_k = N$ من أجل كل $m < k$، والسلسلة (3) تنقطع. □

نختتم هذا البند بالنظرية الآتية التي تبرهن أن الصفة النيوترية أو الأرتينية تنتقل (تورث) من مودول ما إلى المودولات الجزئية فيه، وإلى عوامل المودولات، وبالعكس.

نظرية 11.2.4: ليكن $R\ M$ – مودولاً. عندئذ، M يحقق شرط السلسلة (a.c.c. أو d.c.c.) ⇔ كل مودول جزئي في M وكل عامل مودول لـــ M يحقق نفس الشرط.

البرهان: ⇐: فيما يتعلق بالمودولات الجزئية في M، الادعاء واضح، لأن المودولات الجزئية في مودولات جزئية في M هي أيضاً مودولات جزئية في M. وفيما يتعلق بعوامل المودول، فإن المطلوب ينتج من نظرية التقابل بين المودولات الجزئية في M والتي تحوي مودولاً جزئياً وبين المودولات الجزئية في عامل المودول بالنسبة إلى هذا المودول الجزئي.

⇒: نعطي البرهان بالنسبة إلى حالة السلسلة المتزايدة، لأن البرهان في حالة السلسلة المتناقصة مشابه.

ليكن N مودولا جزئيا في M، وليكن:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \tag{4}$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، عندئذ:

$$M_0 \cap N \supseteq M_1 \cap N \supseteq M_2 \cap N \supseteq \cdots \tag{5}$$

- سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في N، و

$$\varphi(M_0) \supseteq \varphi(M_1) \supseteq \varphi(M_2) \supseteq \cdots \qquad (6)$$

سلسلة من المودولات الجزئية في M/N. إن كلا من السلسلتين (5) و (6) تتقطع بالفرض. نفرض أن (5) منقطعة عند الحد $M_r \cap N$ وأن (6) منقطعة عند الحد $\varphi(M_s)$. ليكن $n = \max\{r,s\}$. عندئذ:

$M_{r+i} \cap N = M_r \cap N$ من اجل كل $i \in \mathbb{N}$.

$\varphi(M_{s+j}) = \varphi(M_s)$ من اجل كل $j \in \mathbb{N}$.

عندئذ، بحسب النظرية 5.2.4 (1)، $M_{n+i} = M_n$ من أجل $i \in \mathbb{N}$. إذا، السلسلة (4) تتقطع عند الحد M_n، و M نيوتري. □

إن النظرية 11.2.4 يمكن صوغها بلغة المتواليات كما يلي:

نظرية 11'.2.4: لتكن: $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$

متوالية صحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات. عندئذ:

(1) M نيوتري $\Leftrightarrow$ M' و M'' نيوتريان.

(2) M أرتيني $\Leftrightarrow$ M' و M'' أرتينيان.

البرهان: نبرهن (1) فقط، لأن برهان (2) مشابه.

$\Leftarrow$: كل سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M' (أو في M'') تعطي سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، وبالتالي فهي منقطعة.

$\Rightarrow$: لتكن:

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M، عندئذ:

$$f^{-1}(M_0) \supseteq f^{-1}(M_1) \supseteq f^{-1}(M_2) \supseteq \cdots$$

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M'، و

$$g(M_0) \supseteq g(M_1) \supseteq g(M_2) \supseteq \cdots$$

المحاضرة الثانية

سلسلة متزايدة من المودولات الجزئية في M''، من أجل i كبير بما فيه الكفاية، كلا السلسلتين في M' و M'' تتقطعا، وينتج من ذلك أن السلسلة الأصلية في M منقطعة. □

نتيجة 12.2.4: إذا كانت أسرة المودولات $(M_i)_{i=1}^n$ هي R – مودولات نيوترية (ارتينية) فإن $\oplus_{i=1}^n M_i$ كذلك.

البرهان: نطبق الاستقراء والنظرية 11.2.4 على المتوالية الصحيحة:

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \oplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \oplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

فنجد المطلوب. □

وهنا يبرز السؤال الهام الآتي: هل نستطيع إعطاء هوية لـــ R – مودولات والتي تحقق شرطي السلسلة معاً؟ هذا ما سنناقشه في البند القادم.

4 – 3 المودولات المتفردة

تعريف 1.3.5: ليكن $_R M$ – مودولاً مختلفاً عن الصفر:

(1) نقول إن M متفرد إذا لم يحو مودولات جزئية خاصة، أي، إذا لم يحو مودولات جزئية مختلفة عنه وعن <0>.

(2) نقول إن M غير قابل للتحليل إذا لم يمكن كتابته بالشكل $M = M_1 \oplus M_2$ من اجل مودولين جزئيين M_1 و M_2 مختلفين عن الصفر، وإلا فإن M قابل للتحليل أو حلول.

(3) يقال إن M قابل للتحليل (حلول) تماماً إذا كان مجموعاً مباشراً لمودولات جزئية متفردة.

إذا كان $_R M$ – مودولاً متفرداً و $w \neq 0 \in M$، فإن $M = Rw$. إن $M = Rw = R/\text{Ann}(w)$، ولكي يكون M متفرداً يجب أن يكون $\text{Ann}(w)$ إيديالاً

أعظمياً في R. إذاً، كل R – مودول متفرد إيزومرفي إلى $R/\mathfrak{M}$ حيث $\mathfrak{M}$ إيديال أعظمي في R، وبالعكس، فإن R – مودولاً من هذا الشكل يكون متفرداً.

أمثلة 2.3.4:

(1) إذا كان V F – فراغاً شعاعاً فوق الحقل F، فمن أجل كل $0 \neq v \in V$ تكون المجموعة $Fv = \{\lambda v : \lambda \in F\}$ مودولا متفردا. وبشكل خاص، F هو F – مودول متفرد.

(2) كل زمرة تبديلية A هي $\mathbb{Z}$ – مودول متفرد عندما وفقط عندما تكون رتبة A عدداً بسيطاً.

(3) ليكن F حقلا ما، و $V = F^2$. عندئذ، V هو $F[x]$ – مودول بالنسبة إلى الإندومرفيزم T، حيث $T(u_1, u_2) = (u_1, 0)$. إن V هو $F[x]$ – مودول دوري، لكن ليس $F[x]$ – مودولاً متفرداً. إن $V = F[x](0.1)$. لكن $N = \langle (u, 0) \rangle$، $u \in F$، هو مودول جزئي في V.

(4) ليكن $V = R^2$ و $T \in End_F(V)$ حيث $T(u, v) = (-v, u)$، عندئذ، $F[x]$ – مودول V_T متفرد. من أجل بيان ذلك، نأخذ $w = (u_1, v_1)$ من V حيث $w \neq 0$. ليكن $N = \langle w \rangle$ مودولاً جزئياً في V_T. عندئذ، $w \in N$ و $xw = T(u_1, v_1) = (-v_1, u_1)$ من N. بما أن كل عنصر $(x, y) \in V$ يمكن كتابته بالشكل $\alpha w + \beta xw$ حيث:

$$\beta = (yu_1 + xv_1)/(u_1^2 + v_1^2) \quad و \quad \alpha = (xu_1 + yv_1)/(u_1^2 + v_1^2)$$

فإن $N = V_T$ و V_T متفرد.

(5) ليكن $V = \mathbb{C}^2$ و $T \in End_F(V)$ حيث $T(u, v) = (-v, u)$. إن $\mathbb{C}[X]$ – مودول V_T ليس متفرداً. لأن الفراغ الجزئي $\mathbb{C}(i, 1)$ هو فراغ جزئي في V، لا متغير بالنسبة إلى T. إذا هو $\mathbb{C}[X]$ – مودول جزئي في V_T مختلف عن $\langle 0 \rangle$ وعن V_T.

فرضية 3.3.4: إذا كان R – مودولاً متفرداً، فإنه دوري.

البرهان: إذا كان $M \neq \langle 0 \rangle$ نأخذ $0 \neq x \in M$. عندئذ، $N = \langle x \rangle \neq \langle 0 \rangle$

و $N=M$ لأن M متفرد. □

إن عكس هذه النتيجة ليس صحيحاً دائماً كما يتضح من المثال (3) أعلاه. إنه صحصح ضمن شروط كما ينضح من الفرضية الآتية.

فرضية 4.3.4: يكون R – مودول دوري $M=\langle m\rangle$ متفرداً عندما وفقط عندما يكون $\text{Ann}(m)$ إيدیالاً أعظمياً في R.

البرهان: من أجل كل $a\in R$ يكون التقابل $a\mapsto am$ إيبيمورفيزماً من R على M نواته $\text{Ann}(m)$. إذاً، $R/Ann(m)\cong M$. بحسب نظرية التقابل، M متفرد $\Leftrightarrow$ $R/Ann(m)$ متفرد $\Leftrightarrow$ $R/Ann(m)$ حقل $\Leftrightarrow$ $Ann(m)$ إيديال أعظمي في R. □

إن الفرضية الآتية سهلة للغاية لكنها مهمة للغاية أيضاً.

فرضية 5.3.4 (ليمّاشور):

(1) ليكن $_R M$ – مودولاً متفرداً. عندئذ، $\text{End}_R(M)$ حلقة قسمة.

(2) ليكن M و N R – مودولين متفردين. عندئذ:

$$M\cong N\Leftrightarrow \text{Hom}_R(M,N)\neq 0$$

البرهان: (1): ليكن $\text{End}_R(M)\ni f\neq 0$. عندئذ، $\text{Im}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن $\langle 0\rangle$. إذاً، $\text{Im}(f)=M$ لأن M متفرد. كما أن $\text{Ker}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن M، لأن $f\neq 0$. إذاً، $\text{Ker}(f)=\langle 0\rangle$ لأن M متفرد أيضاً. إذاً، f هو R – أفتومرفيزم.

(2) بنفس طريقة المناقشة كما في (1)، كل R – هومومرفيزم غير صفري $f:M\to N$ هو R – إيزومرفيزم. □

إن الفرضية السابقة تنتج من النظرية التالية والتي تبين كيفية تأثير الهومومرفيزمات في حال غياب المودولات الجزئية.

نظرية 6.3.4: ليكن M و N R – مودولين و $f: M \to N$ هومومرفيزم R – مودولات غير صفري. عندئذ:

(1) إذا كان M متفرداً، فإن f مونومرفيزم.

(2) إذا كان N متفرداً، فإن f إيبيمورفيزم.

البرهان: (1): إن $\mathrm{Ker}(f)$ مودول جزئي في M مختلف عن M لأن $f \neq 0$. إذاً، $\mathrm{Ker}(f) = \langle 0 \rangle$ لأن M متفرد. إذاً، f مونومرفيزم.

(2): إن $\mathrm{Im}(f)$ مودول جزئي في N مختلف عن $\langle 0 \rangle$ لأن $f \neq 0$. إذاً، لأن M متفرد. إذا $N = \mathrm{Im}(f)$ لأن N متفرد، إذاً، f إيبيمورفيزم. □

نظرية 7.3.4: ليكن F حقلا و V F – فراغاً شعاعاً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) $\dim_F(V)$ محدود؛

(2) V F – مودول نيوتري؛

(3) V F – مودول أرتيني.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2) و (1) $\Leftarrow$ (3): نفرض أن $\dim_F(V) = n$ من أجل كل فراغ جزئي U في V، لدينا $n \geq \dim_F(U)$. وإذا كان U و W فراغين جزئيين في V حيث $U \subsetneq W$، فإن $\dim(U) < \dim(W)$. وينتج من ذلك أن سلسلة منهية من الفراغات الجزئية في V:

$$U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \cdots$$

يجب أن تحقق العلاقة $t \leq n$. إذاً، V هو F – مودول نيوتري و F – مودول أرتيني.

(2) $\Leftarrow$ (1) و (3) $\Leftarrow$ (1): نفرض العكس، أي نفرض أن V غير محدود القياس فوق F. عندئذ، توجد أسرة لانهائية $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ بحيث تكون $(v_i)_{i=1}^{n}$ مستقلة خطياً من أجل كل $n \in \mathbb{N}$. ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نأخذ:

$$W_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} F v_i \quad \text{و} \quad U_n = \sum_{i=1}^{n} F v_i$$

إذاً، U_n فراغ جزئي في V و $\dim_F(U)=n$. بما أن:

$$U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots \subsetneq U_n \subsetneq U_{n+1} \subsetneq \cdots$$

فإن F ليس F – مودولاً نيوترياً، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$، لدينا:

$$\cdots \subsetneq W_{n+1} \subsetneq W_n$$

سلسلة متناقصة من الفراغات الجزئية في V، غير متقطعة. إذاً، V ليس F – مودولاً أرتينياً. تناقض. □

4 – 4 السلاسل المتراصة وطول المودول

ليكن M R – مودولاً. نسمي برجاً في M أو سلسلة في M من المودولات الجزئية كل سلسلةٍ متناقصة من المودولات الجزئية من الشكل:

$$T_1: \quad \{0\}=M_n \subsetneq \cdots \subsetneq M_2 \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$$

يسمى العدد n طول السلسلة (1).

إذا كان لدينا سلسلتان (برجان) من المودولات الجزئية في M:

$$T_1: \quad \{0\}=M_n \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$$

$$T_2: \quad \{0\}=N_m \subsetneq \cdots \subsetneq N_1 \subsetneq N_0 = M$$

فإننا نقول إن T_2 هو تراص لـ T_1 إذا كان من أجل $1 \le i \le n$، يوجد j بحيث يكون $N_i = M_j$. وبعبارة أخرى، إذا كان كل مودول جزئي في البرج T_1 هو مودول جزئي في البرج T_2:

$$\{M_0, M_1, \cdots, M_n\} \subseteq \{N_0, N_1, \cdots, N_m\}$$

نقول إن البرجين T_1 و T_2 متكافئتان إذا كان $m=n$ وإذا وجد تبديل $\sigma \in S_n$ بحيث يكون:

$$N_i / N_{i+1} \cong M_{\sigma(i)} / M_{\sigma(i)+1}$$

إن التراص على سلاسل (أو أبراج) المودولات الجزئية يعرف علاقة ترتيب جزئي على مجموعة سلاسل (أبراج) المودولات الجزئية C في M.

يسمى العنصر الأعظمي في C (إذا وجد) سلسلة (برجاً) تام التراص في M.

ملاحظتان 1.4.4:

(1) السلسلة (البرج) (1) هي سلسلة تامة التراص $\Leftrightarrow$ M_i / M_{i-1} مودول متفرد من أجل كل $1 \le i \le n$.

(2) إذا كان $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$ حيث M_i R – مودول متفرد، فإن M يحوي البرج تام التراص:

$$\langle 0 \rangle = M_1 \subsetneq M_1 \oplus M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \oplus_{i=1}^{n} M_i = M$$

أمثلة 2.4.4:

(1) لتكن R حلقة قسمة و M R – مودولاً قاعدته هي $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$. ليكن $M_i = \{x_1, \cdots, x_i\}$، $M_0 = \langle 0 \rangle$. عندئذ:

$$\langle 0 \rangle = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_{n-1} \subsetneq M_n = M$$

سلسلة من المودولات الجزئية في M طولها n، وبما أن:

$$\begin{aligned} M_i \big/ M_{i-1} &= \langle x_1, \cdots, x_i \rangle \big/ \langle x_1, \cdots, x_{i-1} \rangle \\ &\cong Rx_i \\ &\cong R \end{aligned}$$

فإن السلسلة السابقة تامة التراص لأن R هي R – مودول متفرد.

(2) إن $\mathbb{Z}$ – مودول $\mathbb{Z}$ ليس متفرداً: إذا كانت $(I_i)_{i=1}^{n}$ سلسلة كيفية من المودولات الجزئية طولها n، فإنه بكتابة $I_1 = \langle a_1 \rangle$ نستطيع رص السلسلة السابقة بوضع الإيديال $\langle 2a_1 \rangle$ بين I_1 و $\langle 0 \rangle$.

(3) بنفس طريقة المناقشة كما في المثال (2) نجد انه إذا كانت R ساحة إيديالات رئيسة، فإن R تحوي سلسلة تامة التراص، باعتبار R هي R – مودول.

إن نظرية شرير الآتية هامة جداً.

نظرية 3.4.4 (نظرية التراص لشرير): إذا كان R M – مودولاً، وإذا كان T_1 و T_2 برجين من المودولات الجزئية في M، فإنه يوجد تراص S_1 لـــ T_1 وتراص S_2 لـــ T_2 متكافئان:

البرهان: إذا أعطينا البرجان:

$$T_1: \quad \langle 0\rangle = M_m \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$$

$$T_2: \quad \langle 0\rangle = N_n \subsetneq \cdots \subsetneq N_1 \subsetneq N_0 = M$$

من أجل $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$، نُعرّف:

$$M_{i,j} = M_i + (M_{i-1} \cap N_j)$$
$$N_{j,i} = N_j + (N_{j-1} \cap M_i)$$

دون الإخلال بالحالة العامة، نستطيع فرض أن $n \le m$. عندئذ، بتعريف $M_{i,k} = M_{i,n}$ من أجل $n+1 \le k \le m$، نحصل على البرجين المتناقصين:

$$\cdots = M_{i+1,0} = M_i = M_{i,m} \cdots M_{i,n} \subseteq \cdots \subseteq M_{i,1} \subseteq M_{i,0} = M_{i-1}$$
$$\cdots = N_{j+1,0} = N_j = N_{j,m} \subseteq \cdots \subseteq N_{j,1} \subseteq N_{j,0} = N_{j-1}$$

وهما تراصان لـــ T_1 ولـــ T_2 على الترتيب. لنتأمل الآن عوامل المودولات المشكلة من $M_{i,j-1} \supseteq M_{i,j}$ ومن $N_{j,i-1} \supseteq N_{j,i}$ في السلسلتين الأخيرتين. عندئذ، ينتج مباشرة من النظرية 11.6.3 (بأخذ $N = M_i \subseteq M_{i-1} = P$ و $N' = N_j \subseteq N_{j-1} = P'$) أنه من أجل $i, j = 1, \cdots, m$، أن:

$$M_{i,j-1}\big/M_{i,j} \cong N_{j,i-1}\big/N_{j,i}$$

وبالنتيجة، نجد أن $M_{i,j-1} = M_{i,j} \Leftrightarrow N_{j,i-1} = N_{j,i}$.

لذلك نخلص إلى أنه بحذف المحتويات المتساوية من البرجين المتناقصين، أعلاه، نحصل على التراصين S_1 لـــ T_1 و S_2 لـــ T_2 والذين هما متكافئان. □

تعريف 4.4.4: ليكن M R – مودولاً. نُسمي برج جوردان – هولدر (Jordan – Hölder) من المودولات الجزئية في M، البرج:

$$\langle 0\rangle = M_n \subseteq \cdots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

حيث M_i / M_{i+1} مودول متفرد.

إن أهمية أبراج جوردان – هولدر توضحها الملاحظة الآتية: إن التقابل 1 – 1 والذي يحافظ على الاحتواء، من مجموعة المودولات الجزئية P في M حيث $M_{i+1} \subseteq P \subseteq M_i$ إلى مجموعة المودولات الجزئية في M_i / M_{i+1} يبين حالاً أنه إذا كان T برج جوردان – هولدر فليس له تراص خاص، وبكلام آخر، إذا كان T' تراصاً لـ T فمن الضروري أن تكون محتويات T هي نفس محتويات T'. وهذا يؤدي إلى النتيجة الآتية.

نظرية 5.4.4: ليكن M R – مودولاً. وليكن البرجان:

$$T_1: \quad \langle 0\rangle = M_m \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$$

$$T_2: \quad \langle 0\rangle = N_n \subsetneq \cdots \subsetneq N_1 \subsetneq N_0 = M$$

برجي جوردان – هولدر من المودولات الجزئية في M. عندئذ، $m = n$، و T_1 و T_2 متكافئان.

البرهان: بحسب النظرية 3.4.4، يوجد تراص S_1 لـ T_1 وتراص S_2 لـ T_2 متكافئان. ولكن بما أن T_1 و T_2 هما برجا جوردان – هولدر، فإن تراصيهما الوحيدين هما T_1 و T_2 على الترتيب. □

هذه النتيجة تبين بشكل خاص أن عدد المودولات الجزئية، غير الصفر، والتي تظهر في برج جوردان – هولدر مستقل عن اختيار البرج، يسمى هذا العدد ارتفاع البرج كما يسمى ارتفاع المودول M ويرمز له بالرمز $h(M)$. ومن ناحية أخرى، إذا استعملنا لغة السلاسل المتراصة بدلاً من لغو الأبراج المتراصة، فإننا نستعمل اصطلاح

طول السلسلة التامة التراص أو طول المودول M، ويرمز لهذا الطول بالرمز $l(M)$.
ولسهولة الرجوع إلى هذين المصطلحين نضعهما في التعريف الآتي.

تعريف 6.4.4: إذا كان M R – مودولاً، وإذا وجدت في M سلاسل (أبراج) متراصة من المودولات الجزئية، فإننا نرمز بـــ $l(M)$ (أو بـــ $h(M)$، على الترتيب) للحد الأعلى الأصغري لأطوال (ارتفاعات) السلاسل (الأبراج) المتراصة في M. إذا لم يحو M سلاسل (أبراجاً) متراصة، فإننا نأخذ $l(M)=\infty$ $(h(M)=\infty)$. إذا كان $l(M)<\infty$ $(h(M)<\infty)$ فإننا نقول إن M محدود الطول (الارتفاع، على الترتيب).

من هذا التعريف ينتج مباشرة أن طول (ارتفاع) مودولين إيزومرفيين واحد لكليهما، لأنه إذا كان $f:M\to N$ إيزومرفيزما، فإن صورة سلسلة متراصة (برج متراص) في M هي سلسلة متراصة (برج متراص) في N.

فيما يلي نناقش بعض الخواص الأساسية لهذا المفهوم لما له من فائدة في دراستنا القادمة، وخاصة في البنى الجبرية "4".

نتيجة 7.4.4: ليكن M R – مودولاً، ولتكن

$$\langle 0\rangle = M_n \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$$

سلسلة من المودولات الجزئية في M. إن M محدود الطول عندما وفقط عندما M_i/M_{i+1} محدود الطول من أجل كل $0\le i\le n$، و

$$l(M)=\sum_{i=0}^{n-1} l\left(M_i/M_{i+1}\right)$$

البرهان: نجري الاستقراء بحسب n. لذلك يكفي برهان النتيجة من أجل $n=2$.
ليكن M محدود الطول و $\langle 0\rangle = M_n \subsetneq M_1 \subsetneq M$ سلسلة طولها 2. نرص (نكثف) حتى نحصل على سلسلة متراصة. إن المودولات الجزئية في السلسلة المتراصة الواقعة بين M و M_1 تعطي سلسلة متراصة لـــ M/M_1. وتلك التي تقع

بين M_1 و M_2 تعطي سلسلة متراصة لـ $M_1/M_2 = M_1/\langle 0\rangle = M_1$، وينتج من ذلك أن $l(M)=l(M_1)+l(M/M_1)$.

إذا كان M_1 و M/M_1 محدودي الطول، فإننا نحصل على سلسلة متراصة في M بضم السلسلة المتراصة في M_1 والصورة العكسية في M للمودولات الجزئية في السلسلة المتراصة لـ M/M_1 بالنسبة للهومومرفيزم الطبيعي $\varphi: M \to M/M_1$. □

من هذه النتيجة الهامة تنتج النتيجة الهامة الآتية.

نتيجة 8.4.4: ليكن $_RM$ – مودولاً منتهي الطول. عندئذ، كل مودول جزئي في M منتهي الطول، والصورة الهومومرفية لـ M هي مودول منتهي الطول.

البرهان. □

وبشكل خاص، إذا كان $M=\oplus_{i=1}^{n} M_i$ و M_i محدود الطول من أجل $1\le i\le n$، فإن M محدود الطول و:

$$l(M)=\sum_{i=1}^{n} l(M_i)$$

فرضية 9.4.4: ليكن $_RM$ – مودولاً منهي الطول و $M \supseteq N$ مودولاً جزئياً خاصاً $(M \neq N)$، عندئذ $l(M)>l(N)$.

البرهان: لتكن:

$$\langle 0\rangle = M_n \subsetneq \cdots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M \qquad (1)$$

سلسلة متراصة تماماً من المودولات الجزئية في M من الطول $n=l(M)$. ليكن $N_i = N\cap M_i$. نأخذ الهومومرفيزم ϕ:

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dr, "\phi"] & \\ N_i \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\phi"'] & & M_i/M_{i+1} \end{tikzcd}$$

كتركيب تطبيق الاحتواء ι متبوعا بالهومومرفيزم الطبيعي φ. بما أن $\mathrm{Ker}\phi$ تساوي N_{i+1}، فإنه ينتج من نظرية الإيزومرفيزم الأولى أن N_i / N_{i+1} مودول جزئي في M_i / M_{i+1}. لكن (1) سلسلة متراصة، وبالتالي M_i / M_{i+1} متفرد. إذاً، إما $N_i = N_{i+1}$ وإما $N_i / N_{i+1} = M_i / M_{i+1}$ من أجل $1 \le i \le n-1$. بحذف المحتويات المكررة من السلسلة $(N_i)_{i=0}^{n}$ نحصل على سلسلة متراصة في N من الطول $l(M) = n \ge m$. إذا كان طول هذه السلسلة يساوي n، فإن $N_i / N_{i+1} = M_i / M_{i+1}$ من أجل $1 \le i \le n-1$. إذا $N_1 = M_1, \cdots, N_n = M_n$، أي أن $N = M$. ولكن $M \ne N$ بالفرض. إذاً، السلسلة $(N_i)_{i=0}^{n}$ تحوي حدوداً مكررة. بحذف هذه الحدود المكررة نحصل على سلسلة متراصة من المودولات الجزئية في N طولها أصغر تماماً من $l(M) = n$، أي أن $l(M) > l(N)$. □

نختتم هذه المناقشة الموجزة للسلاسل المتراصة بالنتيجة الهامة الآتية والبالغة الأهمية عند المناقشات الاستقرائية.

فرضية 10.4.4: لتكن المتوالية القصيرة الصحيحة من R – مودولات ومن R – هومومرفيزمات:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

إذا كان طولاً M' و M'' محدودين، فإن طول M محدود و:

$$l(M) = l(M') + l(M'')$$

البرهان: لتكن:

$$\langle 0 \rangle = M'_m \subsetneq \cdots \subsetneq M'_1 \subsetneq M'_0 = M'$$

سلسلة تامة التراص في M'، ولتكن:

$$\langle 0 \rangle = M''_n \subsetneq \cdots \subsetneq M''_1 \subsetneq M''_0 = M''$$

سلسلة تامة التراص في M''. ليكن $M_i = f(M'_i)$ من أجل كل $0 \le i \le m$. ليكن $M_i = g^{-1}(M''_{i-n})$ من أجل كل $n+1 \le i \le n+m$. عندئذ، $(M_i)_{i=0}$ سلسلة من المودولات الجزئية في M و:

$$M_i / M_{i+1} \cong \begin{cases} M'_i / M'_{i+1} & , \quad 1 \le i \le m \\ M''_{i-n} / M''_{i-n+1} & , \quad n+1 \le i \le m+1 \end{cases}$$

إذاً، $(M_i)_{i=0}^{m+n}$ سلسلة تامة التراص في M. إذاً، $l(M) = m+n = l(M') + l(M'')$، كما هو مقرر. □

إن النتيجة 7.4.4 تستنتج مباشرة من الفرضية 10.4.4، بأخذ المتوالية:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\varphi_{M_1}} M/M_1 \longrightarrow 0$$

حيث ι الإدخال الطبيعي و φ_{M_1} الإسقاط الطبيعي، وتطبيق الاستقراء.

نتيجة 11.4.4: ليكن $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$. إذا كان M_i محدود الطول من أجل كل i، فإن M محدود الطول و:

$$l(M) = \sum_{i=1}^{n} l(M_i)$$

البرهان: نأخذ المتوالية:

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{q_1} M \xrightarrow{\pi} M/M_1 \longrightarrow 0$$

حيث $M/M_1 = \oplus_{i=1}^{n-1} M_i$. ثم نطبق الفرضية 10.4.4 على هذه المتوالية والاستقراء على M/M_1.

المحاضرة الثالثة

الفصل الخامس

المودولات الحرة الإسقاطية، والمتباينة

5 – 1 تمهيد

لقد وجدنا أن مفهوم الفراغ الشعاعي هو حالة خاصة من مفهم المودول. وهناك أنواع من المودولات تشبه وتتمتع بكثير من الخواص التي تتمتع بها الفراغات الشعاعية، وخصوصا تلك المودولات المعرفة فوق حلقة قسمة D. وهماك أنواع أخرى من المودولات ذات أهمية بالغة في التطبيقات وفي الدراسة النظرية، وأعني بها "المودولات الحرة" وخصوصا المعرفة فوق ساحة صحيحة، وبشكل أخص، تلك المعرفة فوق ساحة إيديالات رئيسة.

إن مفهوم المودول الحر مرتبط بمفهوم القاعدة، وقاعدة المودول M هي مجموعة جزئية في M، تولد M بحرية. إن مفهوم الحرية، هنا، يعني عدم وجود علاقات بين عناصر هذه المجموعة. ويعبر عن حرية مجموعة ما، في الجبر الخطي، عادة بالاستقلال الخطي لهذه المجموعة.

يجب توخي الدقة الفائقة عند استخدام خاصة الوحدانية في المجموع المباشر (والذي ستستخدمه تكراراً في هذا الفصل)، وخاصة الوحدانية في المودولات الحرة. ونوضح ذلك كما يلي: في المجموع المباشر لمودولين M_1 و M_2، مثلا، فإن كل عنصر $M_1 \oplus M_2 \ni m$ يكتب بشكل وحيد بالشكل $m = m_1 + m_2$ ،$M_i \ni m_i$ ،$i = 1, 2$.

والوحدانية هنا ترجع إلى وحدانية العنصرين m_1 و m_2. أما في حالات المودولات الحرة، فإن خاصة الوحدانية ترجع إلى وحدانية عناصر الحلقة لا إلى عناصر المودولات. مثلا، إذا كان $R=\mathbb{Z}$ و $M_1=M_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، فكل عنصر من $M_1\oplus M_2$ يمثل بشكل وحيد بالشكل m_1+m_2 حيث $m_i\in M_i$، $i=1,2$. ومع ذلك، فإن m_1 مثلاً، يمكن التعبير عنه بالشكل $m_1, 3m_1, 5m_1, \ldots, (2r+1)m_1$. وبالتالي، لا يمثل كل عنصر من $M_1\oplus M_2$ بشكل وحيد في هذه الحالة بالشكل $a_1m_1+a_2m_2$، $a_1, a_2 \in R$، $m_1\in M_1$ و $m_2\in M_2$. إذاً، $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ليس $\mathbb{Z}$ – مودولاً حراً.

في هذا الفصل ندرس بعناية المودولات الحرة، ونعطي تعرفين متكافئين للمودول الحر. هذا بالإضافة إلى أنواع أخرى من المودولات.

5 – 2 المودول الحر

نبدأ بمفهوم القاعدة نظراً لأهميته، حيث نناقش متى تكون أسرة عناصر $X=(x_i)_{i\in I}$ (مُولدة مودولات جزئية) مستقلة خطياً وقاعدة في هذا الفصل نعطي نمونجا لمودول بقاعدة عناصره تطبيقات.

تعريف 1.2.5: نُسمي تركيباً خطياً لأسرة العناصر $X=(x_i)_{i\in I}$ من R – مودول M، المجموع:

$$\sum_i r_i x_i = r_1x_1+\cdots+r_nx_n,\ r_i\in R,\ x_i\in X,\ n\in\mathbb{N}$$

في كل ما يلي نعتبر المجموع $\sum_i r_i x_i$ يرمز دائما إلى مجموع يكون فيه عدد الحدود المختلفة عن الصفر محدوداً، أي أن جميع الحدود تساوي الصفر ما عدا عدد محدود منها. وقد نعبر عن ذلك أحيانا بالعبارة "جميع الحدود تساوي الصفر تقريباً". إذا كان $r_i=0$، فإن الحد r_ix_i لا يظهر في المجموع. إذا كانت جميع الأمثال $r_i=0$، فإن المجموع يؤخذ بالتعريف مساوياً للصفر. ومن محدودية عدد الحدود المختلفة عن الصفر في المجموع $\sum_i r_i x_i$ ينتج مباشرة أن المجموع معروف جيداً.

إن هذا الفهم لمجاميع أسر لانهائية يريحنا من تعقيد المصطلحات. وقد نطلق على المجموع $\sum_i r_i x_i$ المتصف بالخاصة السابقة بأنه مجموع منتهٍ.

لتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من R – مودول M. نرمز لمجموعة كل التراكيب الخطية لعناصر من X بأمثال من الحلقة R بالرمز:

$$\left\{\sum_i r_i x_i : r_i \in R,\, x_i \in X\right\}$$

هذه المجموعة تشكل مودولاً جزئياً في M، يرمز له بالرمز $\langle X\rangle$، أي أن:

$$\langle X\rangle = \left\{\sum_i r_i x_i : r_i \in R,\, x_i \in X,\, i \in I\right\}$$

يسمى $\langle X\rangle$ مودولاً جزئياً مولداً بـــ X، ونقول أيضاً إن X تُولد $\langle X\rangle$. يطلب من القارئ برهان أن $\langle X\rangle$ مودول جزئي في M.

في كل مجموع يمكننا أخذ أحد الأمثال r_i مساويا إلى 1 وبقية الأمثال تساوي 0. عندئذ، يمكننا اعتبار X مجموعة جزئية في $\langle X\rangle$. ولذلك يمكننا اعتبار المودول الجزئي المولد بالأسرة $X=(x_i)_{i\in I}$ بأنه مولد بصورة المجموعة $\{i\}_{i\in I}$. يجب أن نلاحظ أن مفهوم الأسرة يسمح لنا بتكرار العناصر، في حين لا يوجد تكرار في المجموعة. وبعبارة أخرى في مجموعة معطاة لا ينتمي عنصر مرتين إلى هذه المجموعة: إما أن يكون عنصراً منها أو لا يكون. بينما يمكن أن تحوي أسرة ما نفس القيمة في مناقشات عديدة مختلفة. إن مسألة تكرار العناصر تصبح هامة جداً عند دراسة الاستقلال الخطي.

تعريف 2.2.5: تكون أسرة عناصر $X=(x_i)_{i\in I}$ من R – مودول M، مرتبط خطياً عندما وفقط عندما توجد أسرة سلميات $(r_i)_{i\in I}$ من R، ليست جميعها معدومة، بحيث يكون $\sum_i r_i x_i = 0$. إذا لم تكن الأسرة X مرتبطة خطياً فإنها تُسمى مستقلة خطياً. وبعبارة أخرى، إن X مستقل خطياً فوق R (ليست مرتبطة خطياً) عندما وفقط

عندما من أجل كل أسرة سلميات $(r_i)_{i\in I}$ من R، $\sum_i r_i x_i = 0$ تقتضي أن $r_i = 0$ من أجل كل $i \in I$.

لنبرهن النظرية الآتية حول الاستقلال الخطي.

نظرية 3.2.5: لتكن $(x_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من R – مودول M، ولتكن $J \subseteq I$. عندئذ:

(1) إذا كانت الأسرة $(x_i)_{i\in I}$ مستقلة خطياً، فإن الأسرة $(x_i)_{i\in J}$ مستقلة خطياً.

(2) إذا كانت الأسرة الجزئية $(x_i)_{i\in J}$ مرتبطة خطياً، فإن الأسرة $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطياً.

البرهان: إن قسمي النظرية متكافئان، ولذلك، نبرهن أحدهما فقط. لنبرهن الثاني. مثلا. نفرض وجود أسرة سلميات $(r_i)_{i\in J}$ من R، ليست جميعها معدومة، بحيث يكون $\sum_i r_i x_i = 0$، $i \in J$. بإضافة $\sum_i 0x_i$، $i \in I - J$، إلى طرفي المجموع السابق نجد:

$$\sum_{i\in J} r_i x_i + \sum_{i\in I-J} 0x_i = \sum_{i\in J} r_i x_i = 0$$

إذا، $(x_i)_{i\in I}$ مرتبطة خطيا. □

نتيجة 4.2.5: لتكن $X = (x_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من R – مودول M. عندئذ:

(1) $0 \in X$ يقتضي أن X مرتبطة خطياً.

(2) إذا كانت $x_i = x_j$، $i \neq j$، فإن X مرتبطة خطياً.

البرهان: تمرين سهل. □

تعريف 5.2.5: لتكن $X = (x_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من R – مودول M. تُسمى X قاعدة لـــ $\langle X\rangle$ إذا كانت مستقلة خطياً، وتُسمى X قاعدة لـــ M إذا كان $M = \langle X\rangle$، أي أن X قاعدة لـــ M إذا كانت مولدة لـــ M ومستقلة خطياً فوق R.

تعريف (أول): يُسمى R – مودول M حراً إذا وجدت قاعدة له.

نعطي الآن بعض الأمثلة على المودولات الحرة.

نعطي الآن بعض الأمثلة على المودولات الحرة.

أمثلة 6.2.5:

1. إذا اعتبرنا الحلقة R مودولاً فوق نفسها (R حلقة بواحدة 1)، فإن R مودول حر قاعدته $\{1\}$، لأن كل عنصر $a \in R$ يكتب بالشكل:

$a = a1$ و $\{1\}$ تولد R؛

$a = a1 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ و $\{1\}$ مستقلة خطياً فوق R.

وإذا كان $n \in \mathbb{N}$، فإن R^n مودول حر فوق R، قاعدته هي الأسرة $(e_1, \cdots, e_n)$ حيث:

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, \cdots, 0),\ e_n = (0, 0, \cdots, 1)$$

يطلب من القارئ برهان أن الأسرة السابقة قاعدة لـ R^n.

2. كل فراغ شعاعي V فوق حقل ما F هو F – مودول حر.

3. إن $M_{m,n}(R)$ هي R – مودول حر قاعدته أسرة المصفوفات الواحدة $X = (E_{ij})_{i=1,\ j=1}^{m\ \ \ n}$.

4. الحلقة $R[x]$ هي R – مودول حر، قاعدته $X = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$، كما أن $R[x]$ هي $R[x]$ – مودول حر قاعدته (1).

5. كل زمرة تبديلية G هي $\mathbb{Z}$ – مودول. إذا كانت G منتهية، فهي لا تحوي مجموعة جزئية $\mathbb{Z}$ – مستقلة خطيا، لأنه إذا كان $g \in G$، فإن $|a| \cdot g = 0$، $|a| \neq 0$. لذلك، فإن الزمرة التبديلية G لا يمكن أن تكون $\mathbb{Z}$ – مودولاً حراً ما لم تكن $G = \langle 0 \rangle$ وعندها تكون المجموعة ϕ هي قاعدة هذا المودول الحر.

6. إذا كانت R حلقة تبديلية و I إيديالاً في R، فإن I هو R – مودول. لكن إذا لم يكن I إيديالاً رئيساً، فلا يمكن أن يكون R – مودولاً حراً، إذ لا توجد مجموعة مولدة لـ I تكون مستقلة خطياً، لأن المعادلة $(-a_2)a_1 + a_1(a_2) = 0$ محققة دائماً من أجل كل $a_1, a_2 \in R$.

فيما يلي نعطي مثالاً يعتبر نموذجياً عاماً على المودولات الحرة (مودول التطبيقات)، إذ سنبين أن كل مودول حر إيزومرفي إلى مودول ما من هذا النوع.

نبدأ من البداية.

لتكن I و E مجموعتين. نرمز لمجموعة التطبيقات من I إلى E بالرمز E^I، أي أن:

$$E^I = \{f : I \to E\}$$

إذا كانت E مجموعة مُعرّف عليها عملية تجميعية ما، وإذا كان $f,g \in E^I$، فإننا نُعرّف $f+g \in E^I$ بالعلاقة:

$$(f+g)(i) = f(i) + g(i) \quad , \quad \forall i \in I$$

إن العملية "+" المعرفة أعلاه هي عملية ثنائية على E^I.

لقد استعملنا نفس الرمز "+" لكلتا العمليتين المعرفتين على E و على E^I. ورغم أن العملية الثانية مُعرفة بدلالة الأولى، إلا أنهما مختلفتان.

إن النظرية الآتية تعطينا بعض الخواص الهامة للمجموعة E^I.

نظرية 7.2.5: لتكن I مجموعة ما و $(E, +)$ مجموعة مُعرّف عليها عملية ثنائية تجميعية. عندئذ، $(E^I,+)$ مجموعة مُعرّف عليها عملية ثنائية تجميعية. إذا كان 0 عنصراً حيادياً في $(E, +)$، فإن $z : I \to E$، حيث $z(i) = 0$ من أجل كل $i \in I$، هو عنصر حيادي في $(E^I,+)$. إذا كانت $(E, +, 0)$ زمرة تبديلية، فإن $(E^I,+,z)$ زمرة تبديلية.

البرهان: ليكن f، g و h من E^I و $i \in I$. عندئذ:

$$\begin{aligned}
((f+g)+h)(i) &= (f+g)(i) + h(i) \\
&= (f(i)+g(i)) + h(i) \\
&= f(i)+g(i)+h(i) \\
&= f(i)+(g(i)+h(i)) \\
&= (f+(g+h))(i) \\
\Rightarrow ((f+g)+h) &= (f+(g+h))
\end{aligned}$$

وإذا كان $f \in E^I$ و $z \in E^I$، حيث $z(i) = 0$ من أجل $i \in I$، فإن:

$$(f+z)(i)=(f(i)+0=f(i)$$
$$=0+f(i)=z(i)+f(i)=(z+f)(i)$$
$$\Rightarrow (f+z)=f=(z+f)$$

من أجل كل $f \in E^I$ نعرف $g: I \to E$ بالعلاقة $g(i)=-f(i)$ من أجل $i \in I$.
عندئذ:

$$(f+g)(i)=f(i)+g(i)=f(i)-f(i)=0=z(i)$$
$$\Rightarrow (f+g)=z \Rightarrow -f=g$$

إذا، $(E^I,0,z)$ زمرة إذا كانت $(E,+,0)$ زمرة. □

إذا كان هناك عملية ثنائية معرفة على المجموعة E، فإننا نستطيع تعريف جداء عنصر من E^I بعنصر من E، جداءً خارجياً. ونعني بذلك التطبيق:

$$E \times E^I \to E^I$$

ويسمى هذا النوع من التطبيقات جداءً خارجياً على E^I بواسطة E، وبكلام أكثر دقة E – جداء خارجيا على E^I.

وما يهمنا الآن من هذا التعريف بصيغته العامة هو ما يلي.

تعريف 8.2.5: ليكن I مجموعة ما و R حلقة. نُعرّف R – جداء على R^I بأنه العملية الثنائية:

$$\odot: R \times R^I \to R^I$$

حيث

$$\odot(a,f)(i)=(a \odot f)(i)=a \cdot f(i), \quad \forall i \in I$$

حيث العملية "." هي عملية الجداء على الحلقة R.

لاحظ أن العملية $\odot$ ليست عملية ثنائية لا على R لوحدها ولا على R^I لوحدها، إنها عملية مختلطة مُعرّفة على $R \times R^I$. فيما يلي نكتب العناصر بجانب بعضها دون

فصل هذه العناصر بالعملية التي تربط بعضها ببعض، لأنه يفهم من النص ما هي العملية التي تربط العناصر.

نجمع النتائج السابقة في النظرية الآتية من أجل سهولة الرجوع إليها.

نظرية 9.2.5: لتكن I مجموعة ما و R حلقة بواحدة 1. عندئذ:

(1) $(R^I,+,z)$ زمرة تبديلية؛

(2) العملية $R\times R^I \to R^I$ هي R − جداء خارجي على R^I حيث:

(a) $(ab)f=a(bf)$؛

(b) $(a+b)f=af+bf$؛

(c) $a(f+g)=af+ag$؛

(d) $1f=f$.

من أجل كل $R\ni a,b$ وكل $R^I\ni f,g$.

البرهان: بقي علينا برهان (2) فقط. ليكن $R\ni a,b$ و f و g من R^I. عندئذ، من أجل كل $I\ni i$ نجد:

$$\begin{aligned}((ab)f)(i)&=(ab)f)(i)=a(bf(i))=a((bf)(i))\\&=(a(bf))(i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}((a+b)f)(i)&=(a+b)f(i)=(a)f(i)+(b)f(i)\\&=(af+bf)(i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a(f+g))(i)&=a(f+g)(i)=(af)(i)+(ag)(i)\\&=(af+ag)(i)\end{aligned}$$

$$(1f)(i)=1f(i)=f(i)$$

وبذلك يتم برهان النظرية 9.2.5. □

إن ما يهمنا من المودول R^I هو المودول الجزئي المُعرّف كما يلي: نأخذ في R^I مجموعة العناصر المؤلفة من التطبيقات $R^I\ni f$ حيث $f(i)=0$ من أجل جميع

العناصر $i \in I$ تقريباً. أي من أجل جميع العناصر $i \in I$ ماعدا من أجل محدود منها.

يُرمز عادة لهذه المجموعة بالرمز $(R^I)^f$ أو بالرمز $R\langle I\rangle$، أي أن:

$$R\langle I\rangle = \left\{ \begin{array}{c} f : I \to R \quad \& \quad f(i) = 0 \\ \text{من أجل جميع العناصر } i \in I \text{ تقريبا} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (r_i)_{i\in I} \ , \ r_i \in R \quad \& \quad r_i = 0 \\ \text{من أجل جميع العناصر } i \in I \text{ تقريبا} \end{array} \right\}$$

إن النظرية الآتية هي هدفنا من هذا البند. من الآن فصاعداً نرمز للعنصر z بالرمز $\overline{0}$ أو 0، التطبيق الصفري.

نظرية 10.2.5: لتكن I مجموعة ما و R حلقة بواحدة 1. عندئذ، $R\langle I\rangle$ مودول حر فوق R.

البرهان: من أجل كل $i \in I$ نُعرّف التطبيق $f_i : I \to R$ بالعلاقة:

$$f_i(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{إذا كان } k = i \\ 0 & \text{إذا كان } k \neq 1 \end{array} \right.$$

إن أسرة التطبيقات $(f_i)_{i\in I}$ قاعدة لـ $R\langle I\rangle$:

أولاً – إن (f_i) مستقلة خطياً. نفرض أن $\sum_i r_i f_i = 0$. عندئذ، من أجل كل $i \in I$ لدينا:

$$0 = \left(\sum_i r_i f_i\right)(k) = \sum_i r_i f_i(k) = r_k f_k(k) = r_k 1 = r_k$$

ثانياً – (f_i) مولدة لـ $R\langle I\rangle$. ليكن $f \in R\langle I\rangle$. عندئذ، $\sum_i f(i) f_i$ تركيب خطي منتهٍ في $R\langle I\rangle$ و:

$$\left(\sum_i f(i) f_i\right)(k) = \sum_i f(i) f_i(k) = f(k)$$

إذا، $f=\sum_i f(i)f_i$. □

تُسمى القاعدة $(f_i)_{i\in I}$ القاعدة العادية لـــ $R\langle I\rangle$. مثلاً، إذا كان $I=\{1,2\}$، فإن:

$$R\langle I\rangle = R^I = R^{\{1,2\}} = R^2$$
$$=\{(r_1,r_2):r_1,r_2\in R\};\ f_1=(1,0),\ f_2=(0,1)$$

وإذا كانت $I=\{1,2,3\}$، فإن:

$$R\langle I\rangle = R^I = R^{\{1,2,3\}} = R^3$$
$$=\{(r_1,r_2,r_3):r_1,r_2,r_3\in R\}$$
$$f_1=(1,0,0)\ ,\ f_2=(0,1,0),\ f_3=(0,0,1)$$

نختتم هذا البند بالنظرية الآتية.

نظرية 11.2.5: ليكن $R\ M$ – مودولاً، و X مجموعة جزئية في M. تكون X قاعدة لـــ M عندما وفقط عندما كل عنصر $m\in M$ يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي لعناصر من X.

البرهان: لتكن X قاعدة لـــ M و $m\in M$. نفرض أن:

$$m=\sum_i a_i x_i=\sum_i b_i x_i\ \ ;\ a_i,b_i\in R,\ x_i\in X$$

عندئذ، $\sum_i (a_i-b_i)x_i=0$ و $a_i-b_i=0$ لأن (x_i) مستقلة خطياً. إذا، $a_i=b_i$ من أجل كل i.

بالعكس، نفرض أن الشـــرط محقق. عندئذ، X تولـــد M، و 0 يمثل بشكل وحيد كتركيب خطي لعناصر من X، والذي يعني أن X مستقلة خطياً. إذا، X قاعدة لـــ M. □

5 – 3 التطبيق الإحداثي والإحداثيات

تعريف 1.3.5: لتكن $R\ M$ – مودولاً، و $X=(x_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من M. نُعرّف التطبيق $\sigma:R\langle I\rangle\to M$ بالعلاقة:

$$\sigma((r_i)_{i\in I})=\sum_i r_i x_i \ , \ r_i \in R,\ x_i \in X$$

وبعبارة أخرى، إن صورة عنصر ما (r_i) من $R\langle I\rangle$ بالنسبة إلى σ هي تركيب خطي لعناصر من الأسرة المعطاة (x_i) بأمثال هي عناصر الأسرة (r_i). يسمى التطبيق σ تطبيقاً إحداثياً (ستتضح التسمية فيما بعد).

إن σ هو تطبيق بين مودولين، وهو مرتبط بالأسرة (x_i) التي تشكل التركيب الخطي [صورة (r_i)]. عند استعمال أسر متعددة لتعريف التطبيق الإحداثي نستعمل دليلاً للتمييز بين تطبيقين:

الأسرة $(x_i)_{i\in I}$ تعرف التطبيق $\sigma_x((r_i))=\sum_i r_i x_i$، و

الأسرة $(y_i)_{i\in I}$ تعرف التطبيق $\sigma_y((r_i))=\sum_i r_i y_i$.

إن أدلّة الأسر يجب أن تختلف.

لنبرهن أن التطبيق الإحداثي هو تطبيق خطي (هومومرفيزم مودولات). ليكن (r_i) و (s_i) عنصرين كيفيين من $R\langle I\rangle$. عندئذ:

$$\begin{aligned}\sigma((r_i)+(s_i)) &= \sigma((r_i+s_i)) = \sum_i (r_i+s_i)(x_i)\\ &= \sum_i (r_i x_i + s_i x_i) = \sum_i r_i x_i + \sum_i s_i x_i\\ &= \sigma((r_i)) + \sigma((s_i))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(r(s_i)) &= \sigma((rs_i)) = \sum_i (rs_i)(x_i) = \sum_i r(s_i x_i)\\ &= r\sum_i s_i x_i = r\sigma((s_i))\end{aligned}$$

نتحرك الآن كي نفهم خواص التطبيق الإحداثي بشكل أفضل.

يكون التطبيق $\sigma : R\langle I\rangle \to M$ غامراً، إذا وجدت من أجل كل $M \ni m$، أسرة العناصر (r_i) من $R\langle I\rangle$ بحيث يكون:

$$\sigma((r_i)_{i\in I})=m$$

المحاضرة الرابعة

ويكون $\sigma: R\langle I\rangle \to M$ متبايناً، عندما وفقط عندما ينتج من $\sigma((r_i))=\sigma((s_i))$ أن $(r_i)=(s_i)$.

نظرية 2.3.5: لتكن R حلقة بواحدة 1، و M R − مودولاً. عندئذ:

(1) تكون الأسرة (x_i) مستقلة خطياً $\Leftrightarrow$ σ مونوميرفيزم.

(2) تكون الأسرة (x_i) مولدة لــ M $\Leftrightarrow$ σ إيبيمورفيزم.

البرهان: (1): إن (x_i) مستقلة خطياً $\Leftrightarrow$ $\sum_i r_i x_i = 0 \Leftarrow (r_i)=(0) \Leftrightarrow$ $\sigma((r_i))=(0) \Leftarrow (r_i)=(0) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\sigma_x)=\langle 0\rangle \Leftrightarrow \sigma_x$ مونوميرفيزم.

(2): (x_i) تولد M $\Leftrightarrow$ $m=\sum_i r_i x_i$ من أجل كل $m \in M$ ومن أجل (r_i) من $R\langle I\rangle \Leftrightarrow \sigma_x$ إيبيمورفيزم. □

نتيجة 3.3.5: تكون (x_i) قاعدة لــ $M \Leftrightarrow \sigma_x$ إيزومرفيزم.

البرهان: واضح. □

نتيجة 4.3.5: كل R − مودول حر F إيزومرفي إلى $R\langle I\rangle$ من أجل مجموعة ما I. كل مودول إيزومرفي إلى مودول تطبيقات هو مودول حر.

البرهان: ليكن F R − مودولاً حراً و $x=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة لــ F. عندئذ، يكون الهومومرفيزم الإحداثي σ_x إيزومرفيزماً بين $R\langle I\rangle$ وبين M. ومن ناحية أخرى، إذا كان $R\langle I\rangle$ إيزومرفياً إلى M، فإن أسرة صور عناصر القاعدة العادية $(f_i)_{i\in I}$ لــ $R\langle I\rangle$ هي قاعدة لــ M. □

فيما يلي نناقش العلاقة بين الهومومرفيزمات، التوليد، الاستقلال الخطي، وكيف يحافظ الهومومرفيزم على خواص التوليد وخواص الاستقلال الخطي.

نظرية 5.3.5:

(1) ليكن $f: M \to M'$ إيبيمورفيزم R − مودولات، عندئذ:

(a) إذا كانت $(x_i)_{i\in I}$ تولد M، فإن $(f(x_i))_{i\in I}$ تولد M'.

(b) إذا كانت $(y_i)_{i\in I}$ أسرة مستقلة في M'، فإنه توجد أسرة مستقلة خطياً $(x_i)_{i\in I}$ في M بحيث يكون $y_i = f(x_i)$ من أجل $i \in I$.

(2) ليكن $f: M \to M'$ مونومرفيزم R – مودولات، عندئذ:

(a') (x_i) مستقلة خطياً في M $\Leftarrow$ $(f(x_i))$ مستقلة خطياً في M'.

(b') (x_i) أسرة في M حيث $(f(x_i))$ تولد M' $\Leftarrow$ (x_i) تولد M.

البرهان: سهل وينتج من التعريف. □

من هذه النظرية تنتج النتيجة الهامة الآتية.

نتيجة 6.3.5: الصورة المباشرة والصورة العكسية لقاعدة بالنسبة إلى إيزومرفيزم مودولات هي قاعدة.

البرهان: ينتج مباشرة من النظرية 5.3.5. □

لقد وجدنا أن كل R – مودول حر، أي كل R – مودول له قاعدة إيزومرفي إلى $R\langle I\rangle$ من أجل مجموعة مناسبة I (مجموعة أدلة القاعدة). كل مودول له قاعدة هو، في حقيقة الأمر، مودول تطبيقات تأخذ قيمها في الحلقة R. وذاتية أو هوية هذا المودول تعتمد فقط على مجموعة الأدلة، أي على حجم القاعدة لا على القاعدة نفسها. وينتج من ذلك أن أي مودولين فوق نفس الحلقة R يكونان إيزومرفيين، إذا كانت قاعدتاهما من نفس الحجم. وبكلام آخر، بإهمال الإيزومرفيزم يوجد R – مودول حر واحد فقط ذو حجم معطى. هذه النتائج نصوغها في النظرية الآتية.

نظرية 7.3.5: ليكن M و M' R – مودولين حرين، قاعدتاهما من نفس الحجم. عندئذ $M \cong M'$.

البرهان: لتكن $(x_i)_{i\in I}$ قاعـدة لـ M و $(y_j)_{j\in J}$ قاعدة لـ M'. ليكـن $\varphi: I \to J$ تقابلا 1 – 1 بين مجموعتي الأدلة I و J. إن φ يُعرّف إيزومرفيزماً $\phi: R\langle J\rangle \to R\langle I\rangle$ بالعلاقة $\phi(f) = f \circ \varphi$. أي أن الثلاثية:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & & J \arrow[dl, "f"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

تبديلية.

أولاً، ϕ هومومرفيزم R – مودولات: من أجل $f,g \in R\langle J\rangle$ وكل $r \in R$، لدينا:

$$\begin{aligned}\phi(f+g)) &= (f+g)\circ\varphi = f\circ\varphi + g\circ\varphi \\ &= \phi(f)+\phi(g)\end{aligned}$$

$$\phi(rf) = (rf)\circ\varphi = r(f\circ\varphi) = r\phi(f)$$

ثانياً، ϕ متباين: إذا كان $\phi(f)=\phi(g)$، فإن $f\circ g = g\circ\varphi$، وبالتالي:

$$f = (f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = (g\circ\varphi)\circ\varphi^{-1} = g\circ(\varphi\circ\varphi^{-1}) = g$$

و ϕ متباين.

ثالثاً، ϕ غامر: إذا كان $g \in R\langle I\rangle$، فإن $g\circ\varphi^{-1} \in R\langle J\rangle$ و:

$$\phi(g\circ\varphi^{-1}) = (g\circ\varphi^{-1})\circ\varphi = g$$

ولكن $M \cong R\langle I\rangle$ و $M' \cong R\langle I\rangle$. إذا:

$$\sigma_y\circ\phi\circ\sigma_x^{-1} : M \to M'$$

إيزومرفيزم، لأنه تركيب ثلاثة إيزومرفيزمات، كما يوضح المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} R\langle I\rangle \arrow[r, "\sim", "\sigma_x"'] & M \arrow[d, dashed] \\ R\langle I\rangle \arrow[u, "\phi\ \wr"] \arrow[r, "\sim", "\sigma_y"'] & M' \end{tikzcd}$$

وبذلك يتم البرهان. □

كل مودول M له مجموعة مولدة (المودول M نفسه مثلا)، ولكن هذه المجموعة المولدة قد لا تكون قاعدة (أي قد لا تكون مستقلة خطياً). فيما يلي نبرهن أن كل مودول له أسرة مولدات إيزومرفي إلى عامل مودول تطبيقات (أي إلى عامل مودول حر).

نظرية 8.3.5: ليكن R M – مودولاً مولداً بالأسرة $X=(x_i)_{i\in I}$. عندئذ، يوجد مودول جزئي N في $R\langle I\rangle$ بحيث يكون $M\cong R\langle I\rangle/N$. وبعبارة أخرى، كل R – مودول M إيزومرفي إلى عامل مودول حر F، وإذا كان M منتهي التوليد، فإنه إيزومرفي إلى عامل مودول حر منتهي التوليد. في الحقيقة، نستطيع أخذ $\mu(F)=\mu(M)$، حيث $\mu(M)$ يساوي قوة (كاردينالية) أصغر من مجموعة مولدة لـــ M.

البرهـــان: إن الهومومرفيـــزم الإحداثي $\sigma:R\langle I\rangle\to M$ غامـــر. إذاً $M\cong R\langle I\rangle/\operatorname{Ker}(\sigma)$. نأخذ $N=\operatorname{Ker}(\sigma)$. نلاحظ أنه إذا كانت $|I|<\infty$، فإن $F=R\langle I\rangle$ منتهي التوليد. بما أن M عامل F، فإن $\mu(M)\le\mu(F)$. لكن F حر على مجموعة الأدلة I، وبالتالي $\mu(F)\le|I|$. وبما أن I هي مجموعة أدلة المجموعة المولدة لـــ M، فإنه ينتج أن $\mu(F)\le\mu(M)$، إذا كانت $x=(x_i)_{i\in I}$ أصغر مجموعة مولدة لـــ M. لذلك يمكننا أن نأخذ $\mu(F)=\mu(M)$. □

من أجل كل قاعدة لـــ R – مودول M يوجد هومومرفيزم إحداثي خاص به. يمكننا ربط قاعدتين $(x_i)_{i\in I}$ و $(x'_j)_{j\in J}$ للمودول M بجملة معادلات، والذي يمكننا من ذلك هو أن كل عنصر من إحدى القاعدتين يكتب بشكل وحيد كتركيب خطي لعناصر من القاعدة الأخرى. من أجل القاعدة $(x'_i)_{j\in J}$، لدينا:

$$x'_j=\sum_i a_{ij}x_i\ \ ,\ \ j\in J$$

بما أن التركيب الخطي السابق معين بشكل وحيد، فلمعرفة أسرة السلميات (a_{ij}) يجب معرفة x'_j وبالعكس. كل أسرة (a_{ij}) تحوي فقط عدداً منتهياً من العناصر المختلفة عن الصفر، أي جميع عناصر الأسرة تقريبا معدومة.

فيما يلي نعطي أصنافاً ثلاثة من العلاقات البسيطة الخاصة بين قاعدتين. نسمي هذه العلاقات الثلاث التغييرات الأولية للقاعدة، أو العمليات الأولية. نفرض أن القاعدتين تحويان نفس العدد من العناصر، ولذلك نزيلها (نفرقهما) بنفس مجموعة الأدلة I:

I. المبادلة بين عنصريين قاعدة: ليكن $n,m \in I$، $n \neq m$. لتكن $(x_i)_{i\in I}$ و $(x'_j)_{j\in J}$ قاعدتين لـ M:

$$x_i = x'_i \text{ إذا كان } n,m \neq i \text{؛}$$
$$x_m = x'_n$$
$$x_n = x'_m$$

II. جداء عنصر من إحدى القاعدتين بعنصر من R وإضافة الجداء إلى عنصر آخر: ليكن $n,m \in I$، $n \neq m$. نُعرّف القاعدة $(x'_j)_{j\in J}$ بدلالة القاعدة $(x_i)_{i\in I}$ بالشكل:

$$x_i = x'_i \text{ إذا كان } n \neq i \text{؛}$$
$$x_n + rx_m = x'_n \text{؛ حيث } r \in R$$

III. جداء عنصر من إحدى القاعدتين بعنصر قلوب (بواحدة) من R. ليكن $m \in I$ و $s \in R$ واحدة. نُعرّف القاعدة $(x'_j)_{j\in J}$ بدلالة القاعدة $(x_i)_{i\in I}$ بالشكل:

$$x_i = x'_i \text{ إذا كان } m \neq i \text{؛}$$
$$s^{-1}x_m = x'_n$$

علينا أن نبرهن أن العمليات الثلاث السابقة تعرف قاعدة.

نظرية 9.3.5: ليكن M R – مودولاً، و $(x_i)_{i\in I}$ قاعدة معطاة لـ M. عندئذ، تكون الأسرة $(x'_j)_{j\in I}$، المُعرّفة أعلاه في I، II، و III، قاعدة لـ M.

البرهان: يجب أن نبرهن أن الأسرة $(x'_j)_{j\in I}$ مستقلة خطياً فوق R ومولده لـ M. وبكلام آخر، يجب أن نبرهن أن العمليات الثلاث المعرفة لـ $(x'_j)_{j\in J}$ لا تغير من

استقلالية الأسرة $(x_i)_{i\in I}$ خطيا ولا من توليدها لـــ M. وبرهان ذلك يتم بالطريقة ذاتها في الحالات الثلاث. ولذلك، نبرهن إحداها فقط، I مثلاً. نفرض أن:

$$\sum_i r_i x_i' = 0$$

عندئذ:

$$\sum_{i=m,n} r_i x_i' + r_m x_n + r_n x_m = 0$$

أو

$$\sum_{i=m,n} r_i x_i + r_m x_n + r_n x_m = 0$$

إذاً، $r_i = 0$ من أجل كل $I \ni i$ و $(x_i')_{i\in I}$ مستقلة خطياً.

ليكن الآن $M \ni x$ و $x = \sum_i r_i x_i$، $R \ni r_i$. عندئذ:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=m,n} r_i x_i + r_m x_m + r_n x_n \\ &= \sum_{i=m,n} r_i x_i' + r_m x_m' + r_n x_n' \end{aligned}$$

إذاً، $(x_i')_{i\in I}$ تولد M. □

5 – 4 رتبة تطبيق خطي ودرجة انعدامه

في هذا البند كل المودولات هي مودولات حرة ما لم يذكر خلاف ذلك.

ليكن $f: M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. نبين في هذا البند أن الهومومرفيزم f يتعين تماما بتأثيره على عناصر قاعدة منطلقة، ونبين العلاقة بين حجم نواة f، صورة f، ومنطلق f. نبدأ بالنظرية الآتية.

نظرية 1.4.5: ليكن M و M' R – مودولين، و $(x_i)_{i\in I}$ قاعدة لـــ M، و $(y_i)_{i\in I}$ أسرة عناصر من M'، لها نفس حجم قاعدة M. عندئذ، يوجد هومومرفيزم R – مودولات وحيد $f: M \to M'$ حيث $f(x_i) = y_i$ من أجل كل $I \ni i$.

البرهان: نُعرّف $f:M\to M'$ بالعلاقة:

$$f(x)=\sum_i r_i y_i \quad \text{إذا كان} \quad x=\sum_i r_i x_i$$

من الواضح أن $f(x_i)=y_i$ من أجل كل $i\in I$. إن برهان أن f هو هومومرفيزم R – مودولات يتم بالحساب المباشر، ونتركه للقارئ كتمرين سهل. ليكن $g:M\to M'$ هومومرفيزماً آخر حيث $g(x_i)=y_i$ من أجل كل $I\ni i$. $f(x_i)=y_i=g(x_i)$ و $r_i f(x_i)=r_i g(x_i)$ من أجل كل $I\ni i$ وكل $R\ni r_i$. وبالتالي:

$$\begin{aligned} f(x)&=f\left(\sum_i r_i x_i\right)=\sum_i r_i f(x_i)\\ &=\sum_i r_i g(x_i)=\sum_i g(r_i x_i)\\ &=g\left(\sum_i r_i x_i\right)=g(x)\end{aligned}$$

إذا $f=g$. □

من هذه النظرية نجد أن تأثير هومومرفيزم R – مودولات يتعين تماماً بمعرفة تأثيره على عناصر قاعدة المنطلق.

ليكن $f:M\to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. في النظرية التالية نبين كيف يمكن توسيع أية أسرة مولدات لنواة f للحصول على أسرة مولدة لـــ M، ومن ثم نناقش مسألة إيجاد أسرة مولدة لـــ $R_f=\mathrm{Im}(f)$.

نظرية 2.4.5: لتكن $f:M\to M'$ هومومرفيزم R – مودولات:

(1) كل أسرة مولدة لـــ $N_f=\mathrm{Ker}(f)$ توسع إلى أسرة مولدة لـــ M.

(2) إذا كانت $(x_i)_{i\in J}$ تولد N_f و $(x_i)_{i\in I}$، $J\subseteq I$، تولد M، فإن $(f(x_i))_{i\in I-J}$ تولد R_f.

البرهان: (1): لتكن $I'=M-N_f$. إن أسرة العناصر $(x_i)_{i\in J\cup I'}$ تولد M، حيث $x_i=i$ إذا كانت $I'\ni i$.

(2): ليكن $y \in R_f$. يوجد $x \in M$ بحيث يكون $y = f(x)$. ليكن $x = \sum_{i \in I} r_i x_i$، و $r_i \in R$. إن:

$$x = \sum_{i \in I-J} r_i x_i + \sum_{i \in J} r_i x_i$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \sum_{i \in I-J} r_i f(x_i) + \sum_{i \in J} r_i f(x_i) \\ &= \sum_{i \in I-J} r_i f(x_i) + 0 \\ &= \sum_{i \in I-J} r_i f(x_i) \end{aligned}$$

إذا، $(f(x_i))_{i \in I-J}$ تولد R_f. □

والآن نستطيع صياغة وبرهان النظرية الأساسية في هذا البند.

نظرية 3.4.5: ليكن $f : M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات، $(x_i)_{i \in J}$ قاعدة لـ N_f و $(x_i)_{i \in I}$ قاعدة لـ M حيث $J \subseteq I$. عندئذ، $(f(x_i))_{i \in I-J}$ قاعدة لـ R_f.

البرهان: بحسب النظرية 2.4.5، بقي علينا فقط برهان أن $(f(x_i))_{i \in I-J}$ مستقلة خطياً. نفرض أن:

$$\sum_{i \in I-J} r_i f(x_i) = 0$$

عندئذ:

$$f\left(\sum_{i \in I-J} r_i x_i\right) = 0$$

إذا:

$$\sum_{i \in I-J} r_i x_i \in \operatorname{Ker}(f) = N_f$$

ليكن:

$$\sum_{i\in I-J} r_i x_i = \sum_{i\in J} s_i x_i$$

أو

$$\sum_{i\in I-J} r_i x_i + \sum_{i\in J} (-s)_i x_i = 0$$

بما أن $(x_i)_{i\in I}$ مستقلة خطياً، فإن $r_i = 0$ من أجل كل $i \in I-J$، و $s_i = 0$ من أجل $i \in J$.

□

يُسمى $|(x_i)_{i\in J}|$ رنك N_f أو درجة انعدام f ويرمز له بالرمز $\mathrm{null}(f)$، و $|(x_i)_{i\in I}|$ رنك M، ويرمز له بالرمز $\mathrm{rank}(M)$. يُسمى $|(f(x_i))_{i\in I-J}|$ رنك R_f، أو رنك f، ويرمز له بالرمز $\mathrm{rank}(f)$. وبحسب هذه الرموز والاصطلاحات تصاغ النظرية 3.4.5 بالشكل الآتي.

نظرية 3′.4.5: لتكن $f: M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. عندئذ:

$$\mathrm{rank}(M) = \mathrm{null}(f) + \mathrm{rank}(f)$$

البرهان.

□

إن هذه العلاقة تحوي ثلاثة مقادير، يُعلم أحدها إذا علم الاثنان الباقيان:

$\mathrm{rank}(M)$: ويُرمز إلى قوة قاعدة المنطلق M لـ f، أي أنه يدل على حجم هذه القاعدة، وبالتالي حجم المنطلق M.

$\mathrm{null}(f)$: ويدل على قوة نواة f، وبالتالي على حجم هذه النواة. إن كبر هذا العدد أو صغره يدل على بعد f أو قربه من أن يكون متبايناً، على الترتيب، وحدّه الأدنى هو الصفر عندما يكون f مونومرفيزماً، أما حدّه الأعلى فهو $\mathrm{rank}(M)$، عندما يكون f التطبيق الصفري.

$\mathrm{rank}(f)$: ويدل على حجم قاعدة $\mathrm{Im}(f)$، وبالتالي على حجم هذه الصورة، وهو لا يتجاوز $\mathrm{rank}(M')$، مستقر f. إن كبر هذا العدد أو صغره يدل على قرب أو بعد f من أن يكون غامراً، على الترتيب.

إن النظرية $3'.4.5$ تبين أن قوة قاعدة المنطلق (أو كاردياليتها)، أي قوة مجموعة الأدلة I تساوي قوة قاعدة النواة (قوة المجموعة J) مضافا إليها قوة قاعدة الصورة (قوة المجموعة $I-J$). وهنا يجب أن نشير إلى أنه من الضروري دائما أنه يمكن إيجاد قاعدة لنواة هومومرفيزم لتوسيعها إلى قاعدة لكامل المنطلق، على الأقل من أجل المودولات. بالنسبة إلى الفراغات الشعاعية، ذلك ممكن دائما. ومثال المودولات التي تحقق هذه الخاصة هو الآتي. ليكن:

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

مُعرّفاً بالشكل:

$$f(n)=\begin{cases}\bar{1} & \text{إذا كان باقي قسمة } n \text{ على } 2 \text{ هو } 1\\ \bar{0} & \text{إذا كان باقي قسمة } n \text{ على } 2 \text{ هو } 0\end{cases}$$

عندئذ $N_f=\operatorname{Ker}(f)=2\mathbb{Z}$. قاعدة $2\mathbb{Z}$ هي (2). هذه القاعدة لـ $\operatorname{Ker}(f)$ لا توسع قاعدة لـ $\mathbb{Z}$، لأن القاعدة الوحيدة لـ $\mathbb{Z}$ هي (1) أو (-1).

ملاحظة: من المثال 21.3.1، ومن التمرين الذي يليه نجد: أن نقول إن الأسرة $X=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة لـ R – مودول M يكافئ إلى كون M مجموعاً مباشراً لأسرة المودولات الجزئية $(Rx_i)_{i\in I}$ في المودول M، حيث $\operatorname{Ann}(x_i)=\langle 0\rangle$ من أجل كل $i\in I$، وهو R – مودول حر قاعدته $(f_i)_{i\in I}$ حيث $f_i\in N$ معرف بالعلاقة:

$$f=(\delta_{ik})_{k\in I}$$

نقول، في هذه الحالة، إن N حر على مجموعة الأدلة I. إن وجود قاعدة لـ R – مودول M تسهل، إلى حد كبير، بناء هومومرفيزم R – مودول من M إلى N. وهذا ما سنناقشه في البند الآتي.

5 – 5 تعريف آخر للمودول الحر

هناك تعريف آخر للمودول الحر تستخدم فيه لغة التطبيقات، والعلاقات بينها بدلاً من لغة العناصر والعلاقات بينها (وجود قاعدة: الاستقلال الخطي والتوليد).

المحاضرة الخامسة

تعريف 1.5.5: لتكن R حلقة بواحدة 1، و X مجموعة غير خالية. نُسمي R – مودولاً حراً على X المودول F بالإضافة إلى التطبيق $f: X \to F$، حيث من أجل R – مودول M وكل تطبيق $g: X \to M$ يوجد هومومرفيزم R – مودولات وحيد $h: F \to M$ بحيث يكون $h \circ f = g$، أي بحيث يكون المخطط:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "h"] & & M \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

تبديلياً. نرمز لمثل هذا المودول بالرمز (F, f).

إن النظرية 10.2.5 تبرهن على وجود مثل هذا المودول، أي أن $F = R\langle X\rangle$ هو F – مودول حر على المجموعة غير الخالية X. ومن الآن فصاعداً نعني بالمودول الحر (F, f) المودول $F = R\langle X\rangle$، حيث $f: X \to F$.

نظرية 2.5.5: إذا كان (F, f) مودولاً حراً على المجموعة غير الخالية X، فإن f مونومرفيزم (متباين) و $\mathrm{Im}(f)$ قاعدة لـــ F.

البرهان: ليكن $Y \ni x, y$. إذا كان $x \neq y$، فإن $f(x) \neq f(y)$. لبرهان ذلك نختار التطبيق $g: X \to M$ بحيث يكون $g(x) \neq g(y)$. ليكن $h: F \to M$ الهومومرفيزم الوحيد الذي يحقق العلاقة $h \circ f = g$. عندئذ، ينتج من العلاقة:

$$(hf)(x) = h(f(x)) = g(x) \neq g(y) = (hf)(y) = h(f(y))$$

أن $f(x) \neq f(y)$. ليكن الآن $N = \langle \mathrm{Im}(f)\rangle$، ولنتأمل من المخطط:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r, "i"] & N \arrow[r, "\iota_N"] & F \\ F \arrow[urr, dashed, "h"] \arrow[urrr, dashed, "\iota_N \circ h"'] & & & \end{tikzcd}$$

حيث i الاحتواء (الإدخال) الطبيعي لـ $\operatorname{Im}(f)$ في N، و ι_N الاحتواء (الإدخال) الطبيعي لـ N في F، و f' معطى بالعلاقة $f'(x)=f(x)$ من أجل كل $x \in X$.

بما أن F حر على X، فإنه يوجد R − هومومرفيزم وحيد $h:F \to N$ بحيث يكون $h \circ f = i \circ f'$. إن التطبيق $k:F \to F$ المعطى بالعلاقة $k=\iota_N \circ h$ هو R − هومومرفيزم حيث $k \circ f = \iota_N \circ i \circ f'$. ولكن، بما أن F حر على X، فإنه يجب إيجاد R − هومومرفيزم واحد فقط $\theta : F \to F$ بحيث يكون $\theta \circ f = \iota_N \circ i \circ f'$. من الواضح أن $\theta = \mathrm{id}_F$ يحقق هذه العلاقة. وينتج من ذلك أن $\iota_N \circ h = k = \mathrm{id}_F$، والتي تعني أن ι_N غامر. إذاً، $F = N = \langle \operatorname{Im}(f) \rangle$

لنبرهن أن $\operatorname{Im}(f)$ مستقلة خطياً. لتكن $\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}$ مجموعة جزئية منتهية كيفية في $\operatorname{Im}(f)$، و $\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) = 0$. نُعرّف $\theta : X \to R$ بالعلاقة:

$$\theta(x) = \begin{cases} a_i & \text{إذا كان } x_i = x \\ 0 & \text{إذا كان } x_i \neq x \end{cases}$$

عندئـذ، $\theta \in F$ و $\theta = \sum_x \theta(x) f(x)$ أو $\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$. إذاً، $0 = a_i$، $i = 1, 2, \cdots, n$. □

لنبرهن الآن على وحدانية (F, f).

نظرية 3.5.5: ليكن (F, f) R − مودولا حرا على المجموعة غير الخالية X. يكون (F', f') R − مودولا حرا آخر على X عندما وفقط عندما يوجد R − إيزومرفيزم وحيد $j : F \to F'$ بحيث يكون $j \circ f = f'$.

البرهان: نفرض أولاً أن (F', f') R − مودول حر آخر على X. عندئذ، يوجد R − هومومرفيزم $j : F \to F'$ و R − هومومرفيزم $k : F' \to F$ بحيث يكون $j \circ f = f'$ و $k \circ f' = f$. ولما كان:

$$f = k \circ f' = k \circ j \circ f$$

فإننا نحصل على المخطط التبديلي:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "k\circ j"] & & F \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

ولما كان F مودولاً حراً على X، فإن هومومرفيزماً واحداً فقط يجعل هذا المخطط تبديلياً، و id_F يحقق ذلك، أي أن $k\circ j=\mathrm{id}_F$. وبالتالي k و j أحدهما مقلوب الآخر، فكل منهما إيزومرفيزم. (نستطيع بطريقة مماثلة برهان أن $j\circ k=\mathrm{id}_F$، أي أن j و k إيزومرفيزمان متعاكسان.

بالعكس، نفرض أن $j:F\to F'$ إيزومرفيزم R – مودولات. عندئذ، من أجل كل R – مودول M وكل تطبيق $g:X\to M$ يكون المخطط:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "h"] & & M \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

تبديلياً. بما أن (F,f) R – مودول حر على X و $j:F\to F'$ R – إيزومرفيزم، فإن المخطط الآتي تبديلي:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, shift left, "j^{-1}"] & F \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[rr, "h"] & & M \\ & & X \arrow[ull, "f'"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

حيث $h\circ j^{-1}\circ f'=g=h\circ f=g$. ولكي يكون (F',f) مودولاً حراً آخر على X، فإن ذلك يتم إذا وجدنا R – هومومرفيزما $t:F'\to M$، بحيث يكون $t\circ f'=g$ و $t=h\circ j^{-1}$. ولكن $t\circ f'=g$ تكافئ إلى $t\circ j\circ f=g$ والتي (بسبب وحدانية h) تكافئ $t\circ j=h$، والتي بدورها تكافئ $t=h\circ j^{-1}$. □

نتيجة 4.5.5: ليكن (M,α) R – مودولاً حراً على المجموعة غير الخالية X. عندئذ، $\mathrm{Im}(\alpha)$ قاعدة لـ M.

البرهان: ليكن (F, f) المودول الحر على المجموعة X. بحسب النظرية 3.5.5 يوجد R – هومومرفيزم وحيد $\theta : F \to M$ بحيث يكون المخطط:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, dashed, "\theta"] & & M \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

تبديلياً. عندئذ، $\operatorname{Im}(\alpha) = \theta(\operatorname{Im}(f))$ وينتج من ذلك أن $\operatorname{Im}(\alpha)$ قاعدة لـ M، لأن $\operatorname{Im}(\alpha)$ قاعدة لـ F، والإيزومرفيزم يطبق قاعدة المنطلق على قاعدة المستقر. □

مما سبق ينتج انه، بإهمال الإيزومرفيزم، يوجد مودول حر واحد فقط من أجل كل مجموعة غير خالية X. وكنموذج لمثل هذا المودول نأخذ المودول الحر $R\langle X\rangle$ الذي بيناه في النظرية 10.2.5. ومن الآن فصاعداً، سوف نرجع إلى هذا المودول، ونسميه R – مودولاً حراً على X. نقول إن R – مودول M هو مودول حر إذا وجد R – مودول حر (F, f) على مجموعة غير خالية X بحيث يكون $F \cong M$.

نستطيع الآن برهان تكافؤ تعريفي المودول الحر.

نظرية 5.5.5: يكون R – مودول حر، وفق التعريف 1.5.5، عندما وفقط عندما يكون له قاعدة، وفق التعريف 5.2.5. وبعبارة أخرى، إن تعريفي المودول الحر (التعريف 5.2.5 والتعريف 1.5.5) متكافئان.

البرهان: إذا كان $R\ M$ – مودولاً حراً، فإن M إيزومرفي إلى مودول حر على مجموعة ما غير خالية. بما أن الإيزومرفيزم يطبق قاعدة المنطلق على قاعدة المستقر، فإن المودول M له قاعدة. أي أن التعريف 1.5.5 يعطي التعريف 5.2.5.

بالعكس، لتكن X قاعدة للمودول M. ليكن $R\ F$ – مودولاً حراً على X. عندئذ، يكون الإيزومرفيزم الإحداثي $\sigma : F \to M$ إيزومرفيزماً بحسب النتيجة 3.3.5. □

من هذه النظرية نستنتج النتيجة الهامة الآتية والتي تصلح لأن تكون تعريفاً للمودول الحر.

نتيجة 6.5.5: إذا كان M R - مودولاً حراً، فإنه إيزومرفي إلى المجموع المباشر $\oplus_{i\in I}R_i$ حيث $R_i \cong R$. وبكلام أكثر دقة، إذا كانت $X=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة لـ M، فإن $M=\oplus_{i\in I}Rx_i$، حيث $Rx_i \cong R$ من أجل كل $i \in I$.

البرهان: بحسب النظرية 15.6.1 والنظرية 11.2.5، نجد أن $M=\oplus_{i\in I}Rx_i$. وبما أن كل مجموعة وحيدة العنصر $\{x_i\}$ مستقلة خطياً، فإن التطبيق $f_i : R \to Rx_i$ المُعرّف بالعلاقة $f_i(r)=rx_i$ هو R - إيزومرفيزم. □

إن وجود قاعدة لـ R - مودول M يسمح لنا ببناء R - هومومرفيزم مودولات من R - مودول M إلى R - مودول آخر M'. في الحقيقة، توجد النتيجة الهامة الآتية.

نتيجة 7.5.5: ليكن M R - مودولاً حراً، قاعدته $X=(x_i)_{i\in I}$. ليكن M' R - مودولاً كيفياً، و $g : X \to M'$ أي تطبيق. عندئذ، يوجد R - هومومرفيزم وحيد $h : M \to M'$ بحيث يكون $h|X=g$.

البرهان: نُعرّف $h : M \to M'$ بالشكل:

$$h(x)=\sum_i r_i g(x_i) \quad \text{إذا كان} \quad x=\sum_i r_i x_i$$

عندئذ، نجد بكل سهولة أن h يحقق المطلوب. □

إن g هو مقصور h على X أو h هو توسيع g على M. إن محتوى الفرضية 6.5.5، يُصاغ عادةً بالقول: إن قيمة هومومرفيزم يمكن تعيينها بشكل كيفي على قاعدة ما.

نتيجة 8.5.5: لنفرض أن M هو R - مودول حر، قاعدته $X=(x_i)_{i\in I}$.

عندئذ:

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \cong \prod_{i\in I} N_i \; , \quad N_i = N, \forall i \in I$$

البرهان: نُعرّف $\phi : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \prod_{i\in I} N_i$ بالعلاقة:

$$\phi(f) = (f(x_i))_{i\in I} \ , \ \ \forall f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

عندئذ، يكون ϕ إيزومرفيزم زمر تبديلية، وإذا كانت R حلقة تبديلية، فإن ϕ إيزومرفيزم R – مودولات. □

5 – 6 المودولات الإسقاطية

إن المودولات الحرة التي ناقشناها في البنود السابقة هي نوع خاص من صنف من المودولات الأعم، وأعني بها المودولات الإسقاطية.

تعريف 1.6.5: يسمى R – مودول P مودولاً إسقاطياً إذا وجد الهومومرفيزم $\psi : M \to P$ من أجل كل R – هومومرفيزم مودولات غامر $\phi : M \to M'$، وكل R– هومومرفيزم $\varphi : P \to M'$، بحيث يكون $\phi \circ \psi = \varphi$، أي بحيث يكون المخطط:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & M' \end{tikzcd}$$

تبديلياً.

نظرية 2.6.5: كل R – مودول حر F هو مودول إسقاطي.

البرهان: ليكن F R – مودولاً حراً على المجموعة X، ليكن $\phi : M \to M'$ هومومرفيزم R – مودولات غامراً، و $\varphi : F \to M'$ – هومومرفيزم مودولات. من أجل $x \in X$، $\varphi(x) \in M'$، وبما أن ϕ غامر، فإن $\varphi(x) = \phi(m_x)$ حيث $m_x \in M$. بما أن F حر على X، فإنه يوجد $\psi : F \to M$ بحيث يكون $\psi(x) = m_x$ من أجل كل $x \in X$. عندئذ:

$$(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x)) = \phi(m_x) = \varphi(x)$$

إذاً، $\phi \circ \psi = \varphi$. □

نظرية 3.6.5: لتكن $(P_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات. عندئذ، $P=\oplus_{i\in I}P_i$ إسقاطي عندما وفقط عندما P_i إسقاطي من أجل كل $i\in I$.

البرهان: نفرض أن P إسقاطي، وليكن $\phi:M\to M'$ R – إيبيمورفيزما و $\varphi_i:P_i\to M'$ هومومرفيزم R – مودولات.

نعرف $\varphi_j:P_j\to M'$ بالشكل $\varphi_j(P_i)=0$ إذا كان $j\neq i$، ثم نأخذ:

$$\varphi=(\varphi_i):\oplus_{i\in I}P_i\to M'$$

عندئذ، يوجد:

$$\psi:\oplus_{i\in I}P_i\to M$$

بحيث يكون $\phi\circ\psi=\varphi$. نأخذ الآن $\psi_i=\psi/P_i$. عندئذ، $\phi\circ\psi_i=\varphi_i$.

بالعكس، ليكن P_i إسقاطياً من أجل كل $i\in I$، و $\phi:M\to M'$ R – إيبيمورفيزما، و $\varphi:\oplus_{i\in I}P_i\to M'$ هومومرفيزم R – مودولات. نأخذ $\varphi_i=\varphi|P_i$. عندئذ، من أجل كل $i\in I$، يوجد $\psi_i:P_i\to M$ حيث $\phi\circ\psi_i=\varphi_i$. إذا أخذنا الآن $\psi=(\psi_i)$ نحصل على المطلوب. □

إن عكس النظرية 3.6.5 ليس صحيحاً دائماً. ومثال ذلك، المودول $\mathbb{Z}_6\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_3$ فوق $\mathbb{Z}_6$ هو $\mathbb{Z}_6$ – مودول حر قاعدته $\{(\bar{1},\bar{1})\}$. بحسب النظرية 2.6.5، $\mathbb{Z}_6$ مودول إسقاطي لأنه حر. وبحسب النظرية 3.6.5، كل من $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ هو $\mathbb{Z}_6$ – مودول إسقاطي. ولكن أياً منهما ليس $\mathbb{Z}_6$ – مودولاً حراً.

إن النظرية الآتية تعطي أربعة تعاريف متكافئة للمودول الإسقاطي.

نظرية 4.6.5: ليكن P R – مودولاً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) كل متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات و R – هومومرفيزمات:

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{\ f\ }M\xrightarrow{\ g\ }P\longrightarrow 0$$

تنشطر.

(2) يوجد R – مودول P' بحيث يكون $P\oplus P'$ R – مودولاً حراً، أي أن P حد مباشر في R – مودول حر.

(3) من أجل كل R – مودول N وكل R – إيبيمورفيزم $g:M\to P$ يكون الهومومرفيزم:

$$g_*:\mathrm{Hom}_R(N,M)\to\mathrm{Hom}_R(N,P)$$

إيبيمورفيزما.

(4) من أجل كل R – إيبيمورفيزم مودولات $f:M\to M'$ يكون الهومومرفيزم:

$$f_*:\mathrm{Hom}_R(P,M)\to\mathrm{Hom}_R(P,M')$$

إيبيمورفيزماً.

إن الفرضية (4) هي صيغة أخرى لتعريف المودول الإسقاطي.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): لتكن $0\to L\to F\to P\to 0$ تمثيلاً حراً لـــ P. هذه المتوالية تنشطر، وبالتالي $F\cong P\oplus P'$ بحسب النظرية 3.4.3.

(2) $\Leftarrow$ (3): نفرض أن $F=P\oplus P'$ مودول حر وأن $g:M\to P$ إيبيمورفيزم R مودولات. ليكن:

$$g'=g\oplus \mathrm{id}_{P'}:M\oplus P'\to M\oplus P'=F$$

إن g' إيبيمورفيزم أيضاً، وبالتالي توجد المتوالية الصحيحة:

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}(g')\longrightarrow M\oplus P'\xrightarrow{\ g'\ }F\longrightarrow 0$$

بما أن F حر فإن هذه المتوالية تنشطر حسب الفرضية 8.6.3. عندئذ ينتج من النظرية 1.5.3 أن:

$$g'_*:\mathrm{Hom}_R(N,M\oplus P')\to\mathrm{Hom}_R(N,P\oplus P')$$

هو R – إيبيمورفيزم. ليكـــن الآن $f\in\mathrm{Hom}_R(N,P)$، وليكـــن $f'=1\circ f$ حيث $\iota:P\to P\oplus P'$ الاحتـــواء (الإدخـــال) الطبيعي. عندئـــذ، يوجـــد

$\mathrm{Hom}_R(N, M\oplus P') \ni \overline{f}$ حيث $f' = g'_*(f)$. ليكن $\pi : M\oplus P' \to M$ و $\pi' : P\oplus P' \to P$ إسقاطين. نلاحظ أن $\pi'\circ\imath = \mathrm{id}_P$ و $g\circ\pi = \pi'\circ g'$. عندئذ:

$$\begin{aligned} g_*(\pi\circ\overline{f}) &= g\circ(\pi\circ\overline{f}) = (g\circ\pi)\circ\overline{f} = (g'\circ\pi')\circ\overline{f} \\ &= \pi'\circ f' = \pi\circ\imath\circ f = \mathrm{id}_P\circ f = f \end{aligned}$$

لذلك، فإن g_* غامر.

(3) $\Leftarrow$ (4): ليكن $0\to L\to F\xrightarrow{g} P\to 0$ تمثيلا حرا لــ P. بحسب (3) يوجد $\mathrm{Hom}_R(P,F)\ni\beta$ بحيث يكون $g_*(\beta)=\mathrm{id}_P$، أي أن $g\circ\beta=\mathrm{id}_P$. ليكن $f : M\to M'$ إيبيمورفيزم R – مودولات وليكن $\mathrm{Hom}_R(P,M')\ni\varphi$. عندئذ، يوجد مخطط تبدلي من R – مودولات و R – هومومرفيزمات:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{g} & P & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow \varphi & & \\ M & \xrightarrow{f} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

سطراه صحيحان. لتكن $X=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة لــ F. بما أن g غامر، نستطيع اختيار $M\ni y_i$ بحيث يكون $\varphi(g(x_i)) = f(y_i)$ من أجل كل $I\ni i$. عندئذ، بحسب تعريف المودول الحر، يوجد هومومرفيزم R – مودول $h : F\to M$ بحيث يكون $h(x_i)=y_i$ من أجل كل $I\ni i$. بما أن:

$$(f\circ h)(x_i) = f(h(x_i)) = f(y_i) = (\varphi\circ g)(x_i)$$

فإن $f\circ h = \varphi\circ g$. نعرف $\mathrm{Hom}_R(P,M)\ni\overline{\varphi}$ بالعلاقة $\overline{\varphi} = h\circ\beta$ مع ملاحظة أن:

$$\begin{aligned} f_*(\overline{\varphi}) &= f\circ\overline{\varphi} = f\circ(h\circ\beta) = (f\circ h)\circ\beta = \\ &= (\varphi\circ g)\circ\beta = \varphi\circ(g\circ\beta) = \varphi\circ\mathrm{id}_P = \varphi \end{aligned}$$

إذا، f_* إيبيمورفيزم.

(4) $\Leftarrow$ (1): لتكن المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow M\xrightarrow{g} P\longrightarrow 0$$

نأخذ الآن $M'=P$ في (4)، فنجد أن:

$$g_*:\mathrm{Hom}_R(P,M)\to \mathrm{Hom}_R(P,P)$$

إبيمورفيزم. ليكن $\beta:P\to M$ حيث $g_*(\beta)=\mathrm{id}_P$، أي أن $g\circ\beta=\mathrm{id}_P$، وبالتالي، β يشطر المتوالية. وبذلك يتم البرهان. □

من النظرية 4.6.5 تنتج نتائج هامة، ولكن قبلاً نعطي التعاريف الآتية والتي سنصادفها تكراراً.

تعريف 5.6.5: لتكن R حلقة ما، و M R – مودولا. لتكن X مجموعة جزئية في M. نُسمي مُعدِم X، ونرمز له بالرمز $\mathrm{Ann}(X)$، المجموعة:

$$\mathrm{Ann}(X)=\{a\in R: ax=0,\ \forall x\in X\}$$

من السهل برهان أن $\mathrm{Ann}(X)$ إيديال يساري في R. إذا كانت $X=N$ مودولاً جزئياً في M، فإن $\mathrm{Ann}(X)$ إيديال في R. إذا كانت R حلقة تبديلية و $N=\langle x\rangle$، فإن:

$$\mathrm{Ann}(N)=\{a\in R: ax=0\}$$

وهذه النتيجة غير صحيحة ما لم تكن الحلقة R تبديلية. وكمثال على ذلك، نأخذ $R=M=M_n(R)$ و x هو المصفوفة E_{11} التي عنصرها الواقع في المكان (1,1) هو 1 وبقية العناصر جميعها تساوي الصفر. عندئذ، $\mathrm{Ann}(E_{11})$ يتألف من جميع المصفوفات التي عمودها الأول 0، بينما $\mathrm{Ann}(\langle E_{11}\rangle)=\langle 0\rangle$ يُرمز عادةً لـ $\mathrm{Ann}(\langle x\rangle)$ بالرمز $\mathrm{Ann}(x)$ إيديال رتبة x أو إيديال الرتبة لـ x. ولتوضيح هذه التسمية، نأخذ زمرة تبديلية وعنصراً ما $g\in G$. إن G هي $\mathbb{Z}$ – مودول و:

$$\mathrm{Ann}(g)=\{n\in\mathbb{Z}: ng=0\}=\langle p\rangle$$

حيث p هي رتبة g: $p=0(g)$، إذا كان $0(g)<\infty$ و $p=0$ إذا كان $0(g)=\infty$، أي إذا كانت $\langle g\rangle$ زمرة دورية لانهائية.

المحاضرة السادسة

مثال 6.6.5: ليكن F حقلاً ما، و V F – فراغاً شعاعياً. ليكن $T \in \operatorname{End}_F(V)$ و V_T هو $F[x]$ – مودولاً مُعرّفاً بواسطة T (المثال 11.3.1). إذا كان $v \in V$، فإن:

$$\operatorname{Ann}(v) = \{f(x) \in F[x] : f(x) \cdot v = 0\}$$

إن $\operatorname{Ann}(v)$ إيديال رئيس $\langle g(x) \rangle$، لأن $F[x]$ هي .P.I.D.

فرضية 7.6.5: لتكن R حلقة و $M = \langle m \rangle$ R – مودولاً. عندئذ، $M \cong R/\operatorname{Ann}(m)$. إذا كانت $F = R$ حقلاً، فإن $M \cong F$.

البرهان: إن التطبيق $f : R \to M$ المُعرّف بالعلاقة $f(r) = rm$ هو R – إيبيمورفيزم مودولات نواته هي $\operatorname{Ann}(m)$. إذاً، $M \cong R/\operatorname{Ann}(m)$. إذا كانت $F = R$ حقلاً فإن $\operatorname{Ann}(m) = \langle 0 \rangle$، وبالتالي $M \cong F$. □

لتكن R حلقة، I إيديالاً يسارياً في R. ليكن M R – مودولاً. عندئذ نعرف جداء الإيديال I بالمودول M، ونرمز له بالرمز IM، بأنه:

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i ,\ a_i \in I,\ m_i \in M \right\}$$

إن IM مودول جزئي في M. إن الجداء السابق هو تعميم لجداء الإيديالات. إذا كانت الحلقة R تبديلية و $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$، فإنه يوجد التطبيق:

$$\frac{R}{I} \times M \to M$$

مُعرّف بالعلاقة $(a + I, m) \mapsto (a + I)m = am$. إن هذا التطبيق مُعرّف جيداً: إذا كان $a + I = b + I$، فإن $a - b \in I$، وبالتالي $(a - b)m = 0$ من أجل كل $m \in M$، لأن $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$. إذاً، $am = bm$. لذلك، إذا كان $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$، فإن M هو أيضاً R/I – مودول. وكحالة خاصة، حيث يحدث هذا إذا كان $N = M/IM$ حيث I إيديال في R. عندئذ $I \subseteq \operatorname{Ann}(M)$، وبالتالي $N = M/IM$ هو R/I – مودول.

ندخل الآن مفهوماً جديداً، سيلزمنا عندما ندرس المودولات فوق ساحة إيديالات رئيسة.

تعريف 8.6.5: لتكن R ساحة صحيحة و $_R M$ – مودولاً. نقول إن العنصر $x \in M$ هو عنصر التفاف إذا كان $\mathrm{Ann}(x) \neq \langle 0 \rangle$. إذاً، يكون عنصر ما $x \in M$ عنصر التفاف عندما وفقط عندما يوجد $0 \neq a \in R$ بحيث يكون $ax = 0$. لتكن M_τ مجموعة عناصر الالتفاف في M. إذا كان $M_\tau = M$، فإن M يسمى مودول التفاف، وإذا كان $M_\tau = \{0\}$، فإن M يسمى مودولاً حراً من الالتفاف.

فرضية 9.6.5: لتكن R ساحة صحيحة و $_R M$ – مودولاً. عندئذ:

(1) M_τ مودول جزئي في M، يسمى مودول الالتفاف الجزئي في M.

(2) M / M_τ حر من الالتفاف.

البرهان: (1): ليكن $x, y \in M_\tau$ و $c, d \in R$. يوجد $a, b \in R$، $a \neq 0$ و $b \neq 0$ بحيث يكون $ax = 0$ و $bx = 0$. بما أن R ساحة صحيحة فإن $ab \neq 0$. لذلك:

$$\begin{aligned} ab(cx+dy) &= abcx + abdy = (bc)(ax) = ad(by) \\ &= (bc)\cdot 0 + (ad)\cdot 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي $(cx+dy) \in M_\tau$ و M_τ مودول جزئي.

(2): ليكن $0 \neq a \in R$ و $a(x + M_\tau) = 0$ في M / M_τ. عندئذ، $ax \in M_\tau$. وبالتالي يوجد $0 \neq b \in R$ بحيث يكون $b(ax) = (ba)x = 0$. ولما كان $ba \neq 0$ فإن $x + M_\tau = 0$ في M / M_τ. □

فرضية 10.6.5: لتكن R ساحة صحيحة و $_R M$ – مودولاً حراً. عندئذ، M حر من الالتفاف.

البرهان: لتكن $X = (x_i)_{i \in I}$ قاعدة لـــ M و $x \in M_\tau$. عندئذ، يوجد $0 \neq a \in R$ بحيث يكون $ax = 0$. ليكن: $x = \sum_i a_i x_i$، عندئذ:

$$0 = 0x = a\left(\sum_i a_i x_i\right) = \sum_i (aa_i) x_i$$

وبما أن $X=(x_i)_{i\in I}$ قاعدة، فإن $aa_i=0$ من أجل كل i. ولما كانت R ساحة صحيحة و $a\neq 0$، فإن $a_i=0$ من أجل كل i. إذا، $x=0$. ولما كان x كيفياً، فإن $M_\tau=\langle 0\rangle$ و M حر من الالتفاف. □

بعد هذه الجولة نعود الآن إلى النظرية 4.6.5.

نتيجة 11.6.5: لتكن R ساحة صحيحة و P R – مودولا إسقاطيا. عندئذ، P حر من الالتفاف.

البرهان: بحسب النظرية 4.6.5، P حد مباشر في R – مودول حر F. وبحسب الفرضية 10.6.5، F حر من الالتفاف. وكل مودول جزئي في مودول حر من الالتفاف هو مودول حر من الالتفاف. إذاً، P حر من الالتفاف. □

نتيجة 12.6.5: يكون R – مودول P إسقاطياً منتهي التوليد فوق R عندما وفقط عندما يكون P حداً مباشراً في R – مودول حر منتهي التوليد.

البرهان: ليكن P منتهي التوليد وإسقاطياً. بحسب النظرية 8.3.5، والتعريف 7.6.3، يوجد تمثيل حر لـ P:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

حيث F R – مودول حر و $\mu(F)=\mu(P)<\infty$. بحسب النظرية 4.6.5 (2)، يكون P حدا مباشرا في R – مودول حر F.

وبالعكس، لنفرض أن P حد مباشر في R – مودول حر منتهي التوليد F. عندئذ، P إسقاطي. أضف إلى ذلك، أنه إذا كان $F=P\oplus P'$، فإن $F/P'\cong P$، وبالتالي P منتهي التوليد. □

5 – 7 المودولات المتباينة

تعريف 1.7.5: لتكن R حلقة و Q R – مودولا. يُسمى Q مودولاً متبايناً إذا وجد الهومومرفيزم $\psi:M\to Q$ من أجل كل مونومرفيزم مودولات $\phi:M'\to M$ وكل هومومرفيزم R – مودولات $\varphi:M'\to Q$ بحيث يكون $\psi\circ\phi=\varphi$:

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ M' \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\phi"'] & & M \arrow[ul, dashed, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

نظرية 2.7.5: لتكن $(Q_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات. عندئذ، $Q=\prod_{i\in I} Q_i$ مودول متباين ⇔ Q_i مودول متباين من أجل كل $i \in I$.

البرهان: ⇐: ليكن $Q:M'\to M$ R – مونومرفيزماً و $\phi_i':M'\to Q_i$ R – هومومرفيزماً من أجل كل $i\in I$. عندئذ:

$$q_i\circ\varphi_i : M'\to Q$$

$$\begin{tikzcd} Q_i \arrow[r, "q_i"] & Q=\prod Q_i \\ M' \arrow[u, "\varphi_i"] \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\phi"'] & M \arrow[u, dashed, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

يوجد R – هومومرفيزم مودولات $\psi:M\to Q$ بحيث يكون $\psi\circ\phi = q_i\circ\varphi_i$ وبالتالي:

$$\varphi_i : M'\to Q_i \quad \text{و} \quad p_i\circ\psi : M\to Q_i$$

حيث $\varphi_i = id_{Q_i}\circ\varphi_i = p_i\circ q_i\circ\varphi_i = p_i\circ\psi\circ\phi$. إذاً، p_i متباين.

⇒: ليكن $\phi:M'\to M$ هومومرفيزم R مودولات، و $\varphi:M'\to Q$ هومومرفيزم R – مودولات. عندئذ:

$$p_i\circ\varphi : M'\to Q_i$$

إذاً، يوجد هومومرفيزم R – مودولات $\psi_i:M\to Q_i$ بحيث يكون $\psi_i\circ\phi = q_i\circ\varphi$.
عندئذ، $\psi=(q_i\circ\psi_i):M\to Q$. ولكن:

$$\begin{aligned}\psi\circ\phi &= (q_i\circ\psi_i)\circ\phi = q_i\circ(\psi_i\circ\phi) = q_i\circ(p_i\circ\varphi)\\ &= (q_i\circ p_i)\circ\varphi = \varphi\end{aligned}$$

إذا، Q متباين. □

نظرية 3.7.5: ليكن Q R – مودولاً. إن الفرضيتين الآتيتين متكافئتان:

(1) Q متباين.

(2) كل متوالية قصيرة صحيحة $Q \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow M'$ تتشطر.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): بما أن ϕ متباين، فإنه يوجد هومومرفيزم R – مودولات $\alpha : M \to Q$ بحيث يكون $\alpha \circ Q = \mathrm{id}_Q$ والمتوالية تتشطر.

(2) $\Leftarrow$ (1): نأخذ في المتوالية السابقة M متبايناً. عندئذ، بحسب النظرية 2.7.5 Q متباين، لأن Q مودول جزئي في $M \cong Q \times M'$. □

إن هذين النمطين من المودولات (الإسقاطية والمتباينة) وثيقاً الصلة أحدهما بالآخر. ولتوضيح ذلك بعض الشيء نأخذ المودولين A و B فوق حلقة كيفية R. من المسائل الأساسية عند دراسة R – مودولات، التوصيف بدلالة A و B لكل طرق وضع A و B لتشكيل مودولٍ أكبر M بحيث يحوي M مودولاً جزئياً إيزومرفياً إلى A وعامل المودول بالنسبة له إيزومرفياً إلى B. وإحدى طرق بناء مثل هذا المودول M هي أخذ الجداء المباشر $A \times B$ (إذا طابقنا بين A و B وبين المودولين الجزئيين الممثلين لـ A ولـ B مع ملاحظة أن $A \times B \cong A \oplus B$. ومن الطبيعي أن يسأل أحدنا السؤال الآتي: متى تكون هذه الطريقة هي الطريقة الوحيدة لبناء مثل هذا المودول الموسع لـ A و B؟ والجواب يتعلق بكل من A و B. وسعياً وراء الدقة في التعبير والفهم يطرح السؤال بالنسبة إلى كل من A و B على إنفراد: ما هو الشرط الذي يجب أن يحققه المودول A من أجل كل R – مودول M:

(*) متى كان A مودولاً جزئياً في M، يوجد مودول جزئي N في M بحيث يكون $M = A \oplus N$. وما هو الشرط الذي يجب أن يحققه R – مودول B بحيث من أجل كل R – مودول M.

(**) متى كان $M / N \cong B$ من أجل مودول جزئي N في M يوجد مودول جزئي B' في M بحيث يكون $M = N \oplus B'$.

الموديولات التي تحقق الخاصة (**) و (*) تُعطى اسماً خاصاً في التعريف الآتي الذي يعبر عن هذه الخواص بلغة الهومومرفيزمات.

تعريف 4.7.5: لتكن R – حلقة:

1. يُسمى R – مودول P إسقاطياً إذا تحقق الشرط:

متى كان M R – مودولاً و $\varphi: M \to P$ R – إيبيمورفيزماً

يوجد مودول جزئي P' في M بحيث يكون:

$$M = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus P'$$

2. يُسمى R – مودول P متبايناً إذا تحقق الشرط:

متى كان M R – مودولاً و $\psi: Q \to M$ R – مونومرفيزماً

يوجد مودول جزئي N في M بحيث يكون:

$$M = N \oplus Q' \ , \ \ Q' = \psi(Q)$$

لاحظ أن $P \cong P'$ في (1) و $Q \cong Q'$ في (2). يمكن تعريف المودول الإسقاطي بشكل آخر: P إسقاطي إذا تحقق الشرط:

متى وجد R – مودول M و R – إيبيمورفيزم $\varphi: M \to P$،

تكون نواة φ حداً مباشراً في M.

وبالمثل يمكن صياغة المودول المتباين بالشكل التالي:

المودول Q متباين إذا كان حداً مباشراً في R مودول كيفي

يحويه كمودول جزئي.

لاحظ أن خاصتي "الإسقاط" و "التباين" تعتمد فقط على نمطي المودولات الإيزومرفية إلى P و Q على الترتيب.

المحاضرة السابعة

الفصل السادس

الجداء التنسوري

6 – 1 تمهيد

نبدأ الآن بدراسة قسم هام من أقسام الجبر الخطي والذي يسمى الجبر متعدد الخطية. وهذا القسم ذو أهمية كبرى في الدراسات العالية المتقدمة والمتعممة في الجبر الحديث.

لتكن M، N و P ثلاثة مودولات فوق الحلقة R (في كل هذا الفصل نعتبر الحلقة R تبديلية بواحدة 1 ما لم يذكر خلاف ذلك). يُسمى التطبيق $f: M \times N \to P$ ، R – ثناخطياً إذا كان من أجل كل $x \in M$ التطبيق $y \mapsto f(x,y)$ من N في P R – خطياً، وإذا كان من أجل كل $y \in N$، التطبيق $x \mapsto f(x,y)$ من M في P R – خطياً. يرمز أحيانا للتطبيق الثناخطي $f: M \times N \to P$ السابق بالرمز $\langle x,y \rangle$ $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$. عندها يعبر عن خطية التطبيق الثناخطي السابق بالنسبة إلى مركبتيه كما يلي:

$$\langle x, b_1 y_1 + b_2 y_2 \rangle = b_1 \langle x, y_1 \rangle + b_2 \langle x, y_2 \rangle$$

$$\langle a_1 x_1 + a_2 x_2, y \rangle = a_1 \langle x_1, y \rangle + a_2 \langle x_2, y \rangle$$

إذا كان $M = N$ و $P = R$، فإن التطبيق الثناخطي $f: M \times N \to P$ يُسمى شكلاً ثناخطياً على M.

كحالة خاصة من التطبيق الثناخطي، لدينا التطبيق الآتي:

$$Mx\,\mathrm{Hom}_R(M,P) \to P$$

المعطى بالعلاقة:

$$(x, f) \mapsto \langle x, f \rangle = f(x)$$

سوف نبني R – مودولا T، يُسمى الحداء التنسوري لـــ M و N، ذا الخاصة الآتية: التطبيقات الثناخطية:

$$M \times N \to P$$

هي في تقابل 1 – 1 مع مجموعة التطبيقات الخطية:

$$g : T \to P$$

من أجل كل R – مودول P، وزيادة في الإيضاح والدقة نبدأ بالدراسة الدقيقة للجداء التنسوري لمودولين.

6 – 2 تعريف الجداء التنسوري لمودولين

تعريف 1.2.6: ليكن M و N R – مودولين. نسمي جداءً تنسورياً لهذين المودولين، الثنائية (T, g) المؤلفة من R – مودول T ومن R – تطبيق ثناخطي $g : M \times N \to T$ بحيث تتحقق الخاصة: من أجل كل R – مودول P وكل تطبيق R – ثنا خطي $f : M \times N \to P$ يوجد تطبيق خطي وحيد $f' : T \to P$ بحيث يكون $f = f' \circ g$، أي أن كل تطبيق ثناخطي على $M \times N$ يتحلل عبر T.

أضف إلى ذلك، أنه إذا كانت (T, g) و (T', g') ثنائيتين تحققان الخاصة السابقة، فإنه يوجد إيزومرفيزم $j : T \to T'$ بحيث يكون $g' = j \circ g$:

$$\begin{tikzcd}
T' & T \arrow[l, "j"'] \\
M \times N \arrow[u, "g'"] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & P \arrow[u, "f'"'] \arrow[ul, dashed, "f''"]
\end{tikzcd}$$

تُسمى الثنائية (T, g) [إذا وجدت] جداءً تنسورياً لـــ M و N.

ملاحظة: إذا لم تكن الحلقة R تبديلية، فإن الجداء التنسوري للمودولين M و N مُعرّف إذا كان M R - مودولاً يمينياً و N R - مودولاً يسارياً. وهذا الشرط قد أهملناه عند تعريفنا الجداء التنسوري، إذ اعتبرنا الحلقة R تبديلية.

قبل البرهان على وجود ووحدانية الجداء التنسوري للمودولين M و N نبرهن النظرية الآتية.

نظرية 2.2.6: ليكن M و N R - مودولين، و (T,g) جداءهما التنسوري. عندئذ، $\text{Im}(g)$ تولد T.

البرهان: يشبه تماما برهان النظرية 2.5.5 □

نظرية 3.2.6 (نظرية الوحدانية): ليكن M و N R - مودولين، و (T,g) جداءهما التنسوري. إن (T,f) معين بشكل وحيد بإهمال الإيزومرفيزم.

البرهان: نأخذ في التعريف 1.2.6، (T',g') بدلاً من (P,f)، حيث (T',g') جداء آخر ل M و N. عندئذ، نحصل على R – تطبيق خطي وحيد $j:T\to T'$ بحيث يكون $g'=j\circ g$. وبتبديل دوري T و T' نحصل على $j':T'\to T$ بحيث يكون $g=j'\circ g'$. كل من التركيبين $j\circ j'$ و $j'\circ j$ يجب أن يكون التطبيق المطابق، وبالتالي j إيزومرفيزم. □

نظرية 4.2.6 (نظرية الوجود): من أجل كل R - مودولين M و N يوجد الجداء التنسوري لهما.

البرهان: ليكن P R - مودولاً حراً على المجموعة $M\times N$. إن عناصر P هي تراكيب خطية (تعابير) من الشكل $\sum_i a_i(x_i,y_i)$ حيث $a_i\in R$، $x_i\in M$ و $y_i\in N$.

ليكن K مودولاً جزئياً في P مولد بكل عناصر P من الأنماط الآتية:

$$H_1:(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$$
$$H_2:(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$$
$$H_3:(ax,y)-a(x,y),\ (x,ay)-a(x,y)$$

وبكلام آخر، إن K مولد بالمجموعة $H_1 \cup H_2 \cup H_3$.

ليكن $T = P/K$. من أجل كل $(x,y) \in P$، نرمز لصورته في T بالنسبة إلى الهومومرفيزم $g: M \times N \to T$ بالرمز $x \otimes y$: $x \otimes y = (x,y) + K$. عندئذ، T مولد بعناصر من الشكل $x \otimes y$. وينتج من التعاريف السابقة أن:

$$(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$$
$$x \otimes (y+y') = x \otimes y + x \otimes y'$$
$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$$

هذه العلاقات تكافئ ثناخطية التطبيق $g: M \times N \to T$ المُعرّف بالعلاقة $g(x,y) = x \otimes y$.

أي تطبيق $f: M \times N \to P'$ يمدد بواسطة الخطية إلى R − هومومرفيزم مودولات $\overline{f}: P \to P'$. لنفرض أن f هو R − ثناخطي. عندئذ، من التعريف ينتج أن $\overline{f}$ ينعدم على كل مولدات K، وبالتالي على K كاملاً، ولذلك يوجد R − هومومرفيزم مودولات مُعرّف جيداً $f': T \to P'$ بحيث يكون $f'(x \otimes y) = f(x,y)$. إن التطبيق f' مُعرّف بشكل وحيد بهذا الشرط. ولذلك فإن الثنائية (T,g) تحقق شرط النظرية 4.2.6. □

يسمى المودول T المبني أعلاه الجداء التنسوري لـ M و N ويُرمز له بالرمز $T = M \otimes_R N$، أو بالرمز $T = M \otimes N$ إذا لم يؤد ذلك إلى أي التباس. هذا المودول مولد بالجداءات $x \otimes y$.

إذا كانت $(x_i)_{i \in I}$ و $(y_j)_{j \in J}$ أسرتين مولدتين لـ M ولـ N على الترتيب، فإن العناصر $x_i \otimes y_j$ تولد $T = M \otimes N$. إن كل عنصر من $M \otimes N$ هو تركيب خطي من الشكل:

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \otimes y_j \quad , \quad a_{ij} \in R$$

وبشكل خاص إذا كان M و N منتهيي التوليد، فإن $M \otimes N$ كذلك.

ملاحظات 5.2.6:

(1) إن التطبيق $\otimes = \otimes_R$ يُسمى التطبيق التنسوري القرين مع الجداء التنسوري $M \otimes N = M \otimes_R N$، إذا كان $(m,n) \in M \times N$، فإننا نكتب $\otimes(m,n) = m \otimes n$ و(بالمس باللغة) نُسمي هذا جداءً تنسورياً للعنصرين m و n. عندما لا ينشأ التباس بالنسبة إلى R، فإننا في الأغلب الأعم نحذف الدليل R من الرمز $\otimes_R$.

(2) مما سبق يتضح مباشرة أننا نحصل على المتطابقة:

$$0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$$

(3) إن الرمز $x \otimes y$ فيه لبس بطبيعته ما لم نخصص الجداء التنسوري الذي ينتمي إليه هذا العنصر. ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي: ليكن M و N R – مودولين، M' و N' مودولين جزئيين في M و N على الترتيب. وليكن $x \in M'$ و $y \in N'$. عندئذ، يمكن أن يكون $x \otimes y$، كعنصر من $M \otimes N$، صفراء، في حين كونه عنصراً من $M' \otimes N'$ ليس صفراً. مثلاً، إذا كان $M = R = \mathbb{Z}$، $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$، $M' = 2\mathbb{Z}$ و $N' = N$. ليكن $0 \neq y \in N$. عندئذ:

$$2 \otimes y = 1 \otimes 2y = 1 \otimes 0 = 0$$

في $M' \otimes N'$، بينما $2 \otimes y$ ليس صفرا في $M \otimes N$.

(4) كل ما يجب تذكره بالنسبة إلى الجداء التنسوري $M \otimes N$ هو الخاصة المعرفة له، بينما لا تهمنا طريقة بناء هذا الجداء التنسوري.

(5) بدلاً من البدء بالتطبيق الثناخطي $f : M \times N \to P$ كان من الممكن البدء بالتطبيق المتعدد الخطية:

$$f : M_1 \times \cdots \times M_r \to P$$

أي أن f خطي بالنسبة إلى كل مركبة في هذه الحالة. تماماً كما فعلنا في برهان نظرية الوجود ونظرية الوحدانية للجداء التنسوري $M \otimes N$ نحصل على "الجداء متعدد التنسورية" $T = M_1 \otimes \cdots \otimes M_r$ المولد بالعناصر $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$، حيث $x_i \in M_i$،

$1 \leq i \leq r$. وعندئذ نحصل على النظرية الآتية والتي هي تعميم للنظريتين 3.2.6 و4.2.6.

نظرية 6.2.6: لتكن $M_1, \cdots, M_r$ R – مودولات. عندئذ، توجد الثنائية (T, g) المؤلفة من R – مودول T و R – هومومرفيزم $g : M_1 \times \cdots \times M_r \to T$، متمتعة بالخاصة الآتية:

إذا أعطينا R – مودولاً P و R – تطبيقاً متعدد الخطية $f : M_1 \times \cdots \times M_r \to P$ فإنه يوجد R – هومومرفيزم وحيد $f' : T \to P$ بحيث يكون $f = f' \circ g$، أي بحيث يكون المخطط الآتي تبديلياً:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "f'"] \\ M_1 \times \cdots \times M_r \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & P \end{tikzcd}$$

أضف إلى ذلك، أنه إذا كانت (T, g) و (T', g') ثنائيتين تحققان هذه الخاصة، فإنه يوجد إيزومرفيزم وحيد $j : T \to T'$ بحيث يكون $g' = i \circ g$:

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[drr, dashed, "f''"] & & T \arrow[ll, "j"'] \arrow[d, "f'"] \\ M_1 \times \cdots \times M_r \arrow[u, "g'"] \arrow[urr, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & P \end{tikzcd}$$

هناك نوع خاص من الإيزومرفيزمات بين المودولات، تُسمى "إيزومرفيزمات قانونية" وإليكم بعضها.

6 – 3 خواص الجداء التنسوري

لتكن M، N و P R – مودولات. عندئذ توجد الإيزومرفيزمات الآتية:

لتكن M، N و P R – مودولات، F R – مودولاً حراً على المجموعة $M\times N$ و $K\subseteq F$ مودولاً جزئياً مولداً بالمجموعة $H_1\cup H_2\cup H_3$ (انظر برهان النظرية 4.2.6). ليكن:

$$\varphi : F \to F/K = M\otimes N$$

الهومومرفيزم الطبيعي و τ مقصورة على القاعدة $M\times N$ لـــ F:

$$\tau(m,n) = m\otimes n \quad , \quad \tau = \varphi|M\times N$$

عندئذ، من أجل كل R – هومومرفيزم $f : M\otimes N \to P$ يكون التطبيق $g := f\circ\tau : M\times N \to P$ R – تناخطيا:

$$\begin{aligned} g(m+m',n) &= f\circ\tau(m+m',n) = f(\tau(m+m',n)) \\ &= f((m+m')\otimes n) = f(m\otimes n + m'\otimes n) \\ &= f(m\otimes n) + f(m'\otimes n) \\ &= f(\tau(m,n)) + f(\tau(m',n)) \\ &= f\circ\tau(m,n) + f\circ\tau(m',n) \\ &= g(m,n) + g(m',n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(m,n+n') &= f\circ\tau(m,n+n') = f(\tau(m,n+n')) \\ &= f(m\otimes(n+n')) = f(m\otimes n + m\otimes n') \\ &= f(m\otimes n) + f(m\otimes n') = f(\tau(m,n)) + f(\tau(m,n')) \\ &= f\circ\tau(m,n) + f\circ\tau(m',n) = g(m,n) + g(m,n') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(am,n) &= f\circ\tau(am,n) = f(\tau(am,n)) = f((am)\otimes n) \\ &= f(a(m\otimes n)) = af(m\otimes n) = af(\tau(m,n)) \\ &= af\circ\tau(m,n) = ag(m,n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(m,an) &= f\circ\tau(m,an) = f(\tau(m,an)) = f(m\otimes(an) \\ &= f(a(m\otimes n)) = af(m\otimes n) \\ &= af\circ\tau(m,n) = ag(m,n) \end{aligned}$$

إذا، g هو R – هومومرفيزم.

من المهم، بالنسبة إلى المستقبل، أن صورة كل عنصر بالنسبة إلى التطبيق f يمكن التعبير عنها بدلالة $g := f \circ \tau$:

$$\left.\begin{aligned} f\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) &= \sum_i f(m_i \otimes n_i) = \sum_i f \circ \tau(m_i \otimes n_i) \\ &= \sum_i g(m_i, n_i) \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

لتكن $\mathrm{Bil}(M \times N, P)$ مجموعة كل التطبيقات الثناخطية من $M \times N$ إلى P. من الواضح أن هذه المجموعة تصبح R – مودولاً بالنسبة إلى العمليتين:

$$(g_1 + g_2)(m,n) = g_1(m,n) + g_2(m,n)$$

$$(rg)(m,n) = rg(m,n)$$

إن نظير g هو التطبيق $g-$، المُعرّف بالعلاقة:

$$(-g)(m,n) = -g(m,n)$$

إن التطبيق:

$$\phi : \mathrm{Hom}_R(M \otimes N, P) \to \mathrm{Bil}(M \times N, P)$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$\phi(f) = g := f \circ \tau$$

هو R – هومومرفيزم.

فرضية 1.3.6: إن ϕ إيزومرفيزم.

البرهان: إن تباين ϕ ينتج مباشرة من العلاقة (*). لنبرهن غمور ϕ. ليكن $g \in \mathrm{Bil}(M \otimes N, P)$. نوسع g إلى $\overline{g} \in \mathrm{Hom}_R(F, P)$ بالعلاقة:

$$\overline{g}\left(\sum_i r_i(m_i, n_i)\right) = \sum_i g(r_i(m_i, n_i))$$

المحاضرة الثامنة

بما أن g هو R – هومومرفيزم، فإن $\operatorname{Ker}(\overline{g}) \supseteq K$. لذلك يوجد R – هومومرفيزم $f : F/K = M \otimes N \to P$ بحيث يكون $g = f \circ \tau$، أي أن $\phi(f) = f \circ \tau = g$ و ϕ غامر. □

كما عرفنا الجداء التنسوري لمودولين أو لأكثر، يمكننا تعريف الجداء التنسوري لهومومرفيزمين أو أكثر.

تعريف 2.3.6: لتكن M، N، M' و N' R – مودولات، وليكن $\alpha : M \to M'$ و $\beta : N \to N'$ R – هومومرفيزمين. لنتأمل التطبيق:

$$\gamma : M \times N \to M' \otimes N'$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$\gamma(m,n) = \alpha(m) \otimes \beta(n)$$

بسهولة نجد أن γ هو R – هومومرفيزم مودولات. بحسب العلاقة (*) (الفرضية 1.3.6)، لدينا:

$$f\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i g(m_i, n_i)$$

نرمز للتطبيق المولد بـ γ بالرمز $\alpha \otimes \beta$، أي أن:

$$\alpha \otimes \beta : M \otimes N \to M' \otimes N'$$

$$\alpha \otimes \beta\left(\sum_i m_i \otimes n_i\right) = \sum_i \alpha(m_i) \otimes \beta(n_i)$$

يُسمى التطبيق $\alpha \otimes \beta$ الجداء التنسوري لـ α و β.

ليكن $\alpha' : M' \to M''$ و $\beta' : N' \to N''$ هومومرفيزمي R – مودولات. عندئذ، يتطابق الهومومرفيزمان $(\alpha' \otimes \alpha) \otimes (\beta' \otimes \beta)$ و $(\alpha' \otimes \beta') \otimes (\alpha \otimes \beta)$ على كل العناصر من الشكل $x \otimes y$ من $M \otimes N$. وبما أن هذه العناصر تولد $M \otimes N$، فإنه ينتج أن:

$$(\alpha' \otimes \alpha) \otimes (\beta' \otimes \beta) = (\alpha' \otimes \beta') \circ (\alpha \otimes \beta)$$

مثال 3.3.6: (مهم) ليكن M R – مودولاً، و $a \in R$. نُعرّف التطبيق $g_0 : R \times M \to M$ بالعلاقة $g_0(a,m) = am$. إن g_0 تطبيق ثناخطي:

$$\begin{aligned} g_0(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, m) &= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)m \\ &= (\lambda_1 a_1)m + (\lambda_2 a_2)m \\ &= \lambda_1 (a_1 m) + \lambda_2 (a_2 m) \\ &= \lambda_1 g_0(a_1, m) + \lambda_2 g_0(a_2, m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_0(a, \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) &= a(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2) = a(\lambda_1 m_1) + a(\lambda_2 m_2) \\ &= (a\lambda_1)m_1 + (a\lambda_2)m_2 = (\lambda_1 a)m_1 + (\lambda_2 a)m_2 \\ &= \lambda_1 (am_1) + \lambda_2 (am_2) \\ &= \lambda_1 g_0(a, m_1) + \lambda_2 g_0(a, m_2) \end{aligned}$$

إذا كان $g : R \times M \to N$ أي تطبيق ثناخطي له نفس منطلق g_0، $R \times M$، فإن $m \mapsto g(1,m)$ يُعرّف تطبيقًا خطياً $h : M \to N$. أضف إلى ذلك أن:

$$\begin{aligned} g(a,m) &= ag(1,m) = ah(m) = h(am) = h(g_0(a,m)) \\ &= (h \circ g_0)(a,m) \end{aligned}$$

إذاً، $g = h \circ g_0$. وبكلام آخر، إن التطبيق الثناخطي g يعبر عنه بالشكل $g = h \circ g_0$، كما يوضح ذلك المخطط التالي:

$$\begin{tikzcd} & R \times M \arrow[dl, "g_0"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[rr, "h"'] & & N \end{tikzcd}$$

أضف إلى ذلك أن هذا الشرط يعين h بشكل وحيد، لأنه إذا كان $h' : M \to N$ تطبيقاً خطياً آخر يُحقق العلاقة:

$$h(m) = g(1,m) = h' \circ g_0(1,m) = h'(g_0(1,m)) = h'(m)$$

من أجل كل $m \in M$، وبالتالي $h = h'$. إذاً، التطبيق $g_0 : R \times M \to M$ هو تطبيق تناخطي عام على R و M، أي على $R \times M$.

وبشكل عام من أجل كل R – مودول M والمودول الحر R^n، يوجد تطبيق تناخطي عام:

$$g_0 : R^n \times M \to M^n$$

من أجل بيان ذلك، نأخذ القاعدة العادية $(e_i)_{i=1}^n$ لـ R^n. عندئذ، كل عنصر من R^n يكتب بشكل وحيد بالشكل:

$$a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

بأمثال a_i من R، وبالتالي:

$$g_0\left(\sum a_i e_i, m\right) = \left(\sum a_i e_i\right) m = (a_1 m, \cdots, a_n m) \qquad (**)$$

إذا كان $g : R^n \times M \to N$ أي تطبيق تناخطي له نفس منطلق g_0، فإن التطبيق الخطي $h : M^n \to N$ معرف بالعلاقة:

$$h(m_1, \cdots, m_n) = g(e_1, m_1) + \cdots + g(e_n, m_n)$$

عندئذ:

$$\begin{aligned}
h \circ g_0\left(\sum_i a_i e_i, m\right) &= h\left(g_0\left(\sum_i a_i e_i, m\right)\right) = h(a_1 m, \cdots, a_n m) \\
&= g(e_1, a_1 m) + \cdots + g(e_n, a_n m) \\
&= g(a_1 e_1, m) + \cdots + g(a_n e_n, m) \\
&= g\left(\sum_i a_i e_i, m\right) \\
&\Rightarrow h \circ g_0 = g
\end{aligned}$$

وكما في الحالة السابقة، h معين بشكل وحيد بالشرط $g = h \circ g_0$. إذاً، g_0 تطبيق تناخطي عام على $R^n \times M$.

فرضية 4.3.6: من أجل كل R – مودول M، لدينا $R\otimes M\cong M$.

البرهان: نعلم من المثال 3.3.6، أن التطبيق $g_0:R\times M\to M$ المُعرّف بالعلاقة $g_0(a,m)=am$ هو تطبيق ثناخطي. من الواضح أن $\mathrm{Ker}(g_0)\supseteq K$. بحسب الخاصة العامة لـــ g_0 (كما وجدنا ذلك في المثال 3.3.6)، g_0 يولد إيزومرفيزما $\phi:R\otimes M\cong M$ معطى بالعلاقة $\phi(a\otimes m)=am$.

وبشكل عام، بحسب الخاصة العامة لـــ g_0 في العلاقة (**)، يوجد إيزومرفيزم $\phi:R^n\otimes M\cong M^n$ حيث:

$$\phi((a_1,\cdots,a_n)\otimes m)=(a_1m,\cdots,a_nm)$$

من أجل كل $M\ni m$ وكل $R\ni a_i$. □

يمكن برهان الفرضية 4.3.6 مباشرة.

برهان آخر للفرضية 4.3.6: ليكن التطبيق:

$$f:R\otimes M\to M$$

مُعرّفاً بالعلاقة:

$$f\left(\sum_i a_i\otimes m_i\right)=\sum_i a_im_i$$

إن f هو R – إيزومرفيزم. لبيان ذلك، نأخذ التطبيق:

$$g:R\times M\to M \quad : \quad (a,m)\xrightarrow{g}am$$

إن g تطبيق ثناخطي (برهن!) و $g(ra,m)=rg(a,m)$. إذا:

$$f\left(\sum_i a_i\otimes m_i\right)=\sum_i g(a_im_i)$$

وبالتالي f هو R – إيزومرفيزم، وهو غامر وضوحاً.

وإذا كان $\sum_i a_i\otimes m_i\in\mathrm{Ker}(f)$، فإن:

$$\sum_i a_i \otimes m_i = \sum_i (1 \otimes a_i m_i) = 1 \otimes \sum_i a_i m_i = 1 \otimes 0 = 0$$

إذا، f متباين، وبالتالي فهو إيزومرفيزم. □

إذا كان F R – مودولاً حراً على المجموعة $R \times M$، و $g_0 : R \times M \to M$ مُعرّفاً بالعلاقة $g_0(a,m) = am$. فإن g_0 هو تطبيق ثناخطي كما وجدنا أعلاه (انظر المثال 3.3.6).

ليكن الآن $\varphi : F \to F/K = R \otimes M$ الهومومرفيزم الطبيعي، و τ مقصورة على القاعدة $R \times M$ لـ F، أي أن:

$$\tau(a,m) = a \otimes m \quad , \quad \tau = \varphi | R \times M$$

إن التطبيق:

$$g := f \circ \tau : R \times M \to M$$

هو R – هومومرفيزم ثناخطي، وبرهان ذلك هو تماماً كما في حالة $M \times N$ بدلاً من $R \times M$.

فرضية 5.3.6: ليكن M و N R – مودولين. عندئذ:

$$M \otimes N \cong N \otimes M$$

البرهان: نُعرّف التطبيق $f : M \otimes N \to N \otimes M$ بالعلاقة $f(m \otimes n) = n \otimes m$

بسهولة نجد أن f هو R– إيزومرفيزم. □

فرضية 6.3.6: لتكن M، N و P R – مودولات. عندئذ:

$$M \otimes (N \otimes P) \cong (M \otimes N) \otimes P$$

البرهان: نثبت العنصر $p \in P$، ونُعرّف التطبيق:

$$f_p : M \times N \to M \otimes (N \otimes P)$$

بالعلاقة:

$$f_p(m,n)=m\otimes(n\otimes p)$$

بحسب النظرية 4.2.6، نحصل عندئذ على التطبيق:

$$f:(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes(N\otimes P)$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$f(m\otimes n,p)=f'_p(m\otimes n)=m\otimes(n\otimes p)$$

لكن f ثناخطي، وبالتالي يوجد R – تطبيق ثناخطي:

$$f':(M\otimes N)\otimes P\to M\otimes(N\otimes P)$$

يُحقق العلاقة $f'((m\otimes n)\otimes p)=m\otimes(n\otimes p)$.

وبالمثل نجد R – تطبيقاً ثناخطياً:

$$g':M\otimes(N\otimes P)\to(M\otimes N)\otimes P$$

يُحقق العلاقة $g'(m\otimes(n\otimes p))=(m\otimes n)\otimes p$. بسهولة نجد أن $g'\circ f'$ هو التطبيق المطبق على العناصر $m\otimes(n\otimes p)$، وأن $f'\circ g'$ هو التطبيق المطابق على العناصر من الشكل $m\otimes(n\otimes p)$. وبما أن هذه العناصر تولد الجداءات التنسورية، فإنه ينتج أن f' (و g') إيزومرفيزم.

□

فرضية 7.3.6: ليكن $M=\oplus_{i\in I}M_i$ و $N=\oplus_{j\in J}N_j$ R – مودولين. عندئذ:

$$M\otimes N=\oplus_{i\in I}\oplus_{j\in J}(M_i\otimes N_j)$$

البرهان: لتكن $M\otimes N\supseteq L_{ij}$ مجموعة جزئية مُعرّفة بالشكل:

$$L_{ij}=\langle m_i\otimes n_j:m_i\in M_i,\ n_j\in N_j\rangle$$

عندئذ، $L_{ij}\cong M_i\otimes N_j$ و $M\otimes N=\oplus_{i\in I,j\in J}L_{ij}$، وبالتالي:

$$(\bigoplus_{i\in I}M_i)\otimes(\bigoplus_{j\in J}N_j\cong\bigoplus_{i\in I,j\in J}(M_i\otimes N_j)$$

لبرهان ذلك، نلاحظ أولاً أن:

$$M \otimes N = \sum_{i\in I, j\in J} L_{ij}$$

لتكن $\iota_i : M_i \to M$ و $\iota'_j : N_j \to N$ ، $p_i : M \to M_i$ و $p'_j : N \to N_j$ الإدخالين والإسقاطين على الترتيب، المُعرّفين للمجموع المباشر. عندئذ، $p_i \circ \iota_i = \mathrm{id}_{M_i}$ و $p'_j \circ \iota'_j = \mathrm{id}_{N_j}$. وبالتالي:

$$id_{M_i \otimes N_j} = p_i \circ \iota_i \otimes p'_j \circ \iota'_j = (p_i \otimes p'_j) \circ (\iota_i \otimes \iota'_j)$$

لذلك، فإن $\iota_i \otimes \iota'_j$ مونومرفيزم يكون من أجله $L_{ij} \supseteq \mathrm{Im}(\iota_i \otimes \iota'_j)$ ، وينتج من تعريف L_{ij} ومن تعريف $\iota_i \otimes \iota'_j$ أن المساواة محققة في حقيقة الأمر: $\mathrm{Im}(\iota_i \otimes \iota'_j) = L_{ij}$ ، أي أن $\iota_i \otimes \iota'_j$ يولد إيزومرفيزماً $w_{ij} : M_i \otimes N_j \cong L_{ij}$. وهذا يعني أنه لا فرق بين العناصر $m_i \otimes n_j \in M \otimes N$ وبين العناصر $m_i \otimes n_j \in M_i \otimes N_j$ حيث $M_i \ni m_i$ و $N_j \ni n_j$.

بما أن w_{ij} إيزومرفيزم، فإن $p_i \circ p'_i \mid L_{ij}$ هو أيضاً إيزومرفيزم. وينتج من ذلك أن:

$$w_{ij} \circ (p_i \otimes p'_i) / L_{ij} = id_{L_{ij}}$$

وبالتالي:

$$w_{ij} \circ (p_i \otimes p'_i)$$

هو إسقاط لـ $M \otimes N$ على L_{ij} . إذا $M \otimes N = \oplus L_{ij}$. □

فرضية 8.3.6: لتكن M، M_1، M_2، و N، N_1، N_2 R – مودولات. عندئذ:

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong M_1 \otimes N \oplus M_2 \otimes N$$

$$M \otimes (N_1 \oplus N_2) \cong M \otimes N_1 \oplus M \otimes N_2$$

المحاضرة التاسعة

البرهان: هذه الفرضية تنتج مباشرة من الفرضية 6.3.6 السابقة. لكننا نبرهنها الآن مباشرة. ليكن التطبيق:

$$\theta : M \otimes (N_1 \oplus N_2) \to (M \otimes N_1) \oplus (M \otimes N_2)$$

المُعرّف بالعلاقة:

$$\theta(m \otimes (n_1, n_2)) = (m \otimes n_1, m \otimes n_2)$$

عندئذ، θ إيزومرفيزم. ولبرهان ذلك، نبرهن على وجود معكوس له، ونستعين لذلك بالمخطط، مستعملين الخاصة العامة للجداء التنسوري $\otimes$:

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, dashed, "\theta'_1"'] & (M \otimes N_1) \oplus (M \otimes N_2) \arrow[d, dashed, "\theta'"] & M \otimes N_2 \arrow[l, "\iota_2"'] \arrow[dl, dashed, "\theta'_2"] \\
& M \otimes (N_1 \oplus N_2) &
\end{tikzcd}$$

بما أن $m \otimes (n_1, 0)$ و $m \otimes (0, n_2)$ خطيان بالنسبة إلى n_i و m، وبما أن $\otimes : M \times N_i \to M \otimes N_i$ عام، فإنه يوجد التطبيقان الخطيان θ'_1 و θ'_2 كما هو موضح في الشكل أعلاه، حيث:

$$\theta'_2(m \otimes n_2) = m \otimes (0, n_2) \quad \text{و} \quad \theta'_1(m \otimes n_1) = m \otimes (n_1, 0)$$

بما أن الإدخالين ι_1 و ι_2 عامين، فإن التطبيقين θ'_1 و θ'_2 معا يُعرّفان تطبيقاً خطياً واحداً θ' على $(M \otimes N_1) \oplus (M \otimes N_2)$ يحقق العلاقتين $\theta' \circ \iota_1 = \theta'_1$ و $\theta' \circ \iota_2 = \theta'_2$.

إذاً:

$$\theta'(m_1 \otimes n_1, m_2 \otimes n_2) = m_1 \otimes (n_1, 0) + m_2 \otimes (0, n_2) \in M \otimes (N_1 \oplus N_2)$$

من هذه العلاقات ومن تعريف "+" على $N_1 \oplus N_2$ نجد:

$$\begin{aligned} \theta \circ \theta'(m_1 \otimes n_1, m_2 \otimes n_2) &= (m_1 \otimes n_1, 0) + (0, m_2 \otimes n_2) \\ &= (m_1 \otimes n_1,, m_2 \otimes n_2) \end{aligned}$$

$$\theta' \circ \theta(m \otimes (n_1, n_2)) = m \otimes (n_1, 0) + m \otimes (0, n_2)$$
$$= m \otimes (n_1, n_2)$$

إذا، كل من $\theta \circ \theta'$ و $\theta' \circ \theta$ هو تطبيق مطابق، وبالتالي كل منهما إيزومرفيزم، أي أن:

$$M \otimes (N_1 \oplus N_2) \cong M \otimes N_1 \oplus M \otimes N_2$$

وبالمثل نجد:

$$(M_1 \oplus M_2) \otimes N \cong M_1 \otimes N \oplus M_2 \otimes N$$

وعند هذا يتم برهان الفرضية 8.3.6. □

ملاحظة: كان من الممكن الحصول على الإيزومرفيزم الثاني من الأول في النظرية 8.3.6 بملاحظة الفرضية 5.3.6.

فرضية 9.3.6: ليكن M و N R – مودولين حرين على مجموعتين منتهيتين، الأول M على المجموعة $\{x_1, \cdots, x_m\}$، والثاني N على المجموعة $\{y_1, \cdots, y_m\}$. عندئذ، $M \otimes N$ R – مودول حر على المجموعة $\{x_i \otimes y_i\}$.

وبشكل خاص إذا كان M و N فراغين شعاعيين، فإن:

$$\dim(M \otimes N) = \dim(M) \times \dim(N)$$

البرهان: ليكن K R – مودولاً كيفياً، و $\{k_{ij}\}$، حيث $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، مجموعة كيفية من العناصر. عندئذ، يوجد R – تطبيق ثناخطي وحيد:

$$h : M \times N \to K$$

بحيث يكون $h(x_i, y_j) = k_{ij}$. نُعرّف التطبيق h بالعلاقة:

$$h\left(\sum a_i x_i, \sum b_j y_j\right) = \sum_i \sum_j a_i a_j k_{ij}$$

إن h تطبيق ثناخطي، وبما أن الأمثال a_i و b_j معينة بشكل وحيد، فإن h مُعيّن بشكل

وحيد. ومن الواضح أن $h(x_i,y_j)=k_{ij}$ من أجل كل $1\le i\le m$، $1\le j\le n$.

ليكن الآن F R – مودولاً حراً قاعدته (e_{ij})، $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$. عندئذ من أجل كل تطبيق ثناخطي $h:M\times N\to D$ يوجد تطبيق خطي وحيد $t:F\to D$ بحيث يكون $t(e_{ij})=h(x_i,y_j)$ من أجل كل i و j. بحسب القسم الأول من البرهان، يوجد أيضاً تطبيق ثناخطي $w:M\times N\to F$ بحيث يكون $w(x_i,y_j)=e_{ij}$ من أجل كل i و j. إذاً، t هو التطبيق الخطي الوحيد حيث $(t\circ w)(x_i,y_i)=h(x_i,y_i)$. وبحسب وحدانية h في القسم الأول، فإن ذلك يعني أن t هو التطبيق الخطي الوحيد المحقق للعلاقة $t\circ w=h$. وهذا يعني أن w هو تطبيق ثناخطي عام على $M\times N$ ومستقره F هو الجداء التنسوري $M\otimes N$. وبحسب البناء هو مودول حر على القاعدة $x_i\otimes y_i=w(x_i,y_i)$ كما هو مقرر. □

إن الفرضية السابقة (الفرضية 9.3.6) صحيحة حتى ولو لم يكن المودولان M وN محددي القاعدتين (انظر التمارين المحلولة).

فرضية 10.3.6: لتكن R حلقة، و M R – مودولاً. لتكن $S\subseteq R$ مجموعة جداء. عندئذ R_S – مودول M_S إيزومرفي إلى $R_S\otimes_S M$.

البرهان: نُعرّف التطبيق $f:R_S\otimes_S M\to M_S$ بالعلاقة:

$$f((a/s)\otimes m)=am/s,\ \forall a\in R, m\in M, s\in S$$

لنبرهن أن f إيزومرفيزم. من أجل ذلك، نأخذ التطبيق:

$$R_S\times M\to M_S\ ,\ (a/s,m)\mapsto am/s$$

إن هذا التطبيق هو R – ثناخطي، ولذلك، بحسب الخاصة العامة للجداء التنسوري، يتولد لدينا الهومومرفيزم f السابق تعريفه. إن f مُتباين ومُعين بشكل جيد بالعلاقة المُعرّفة له. من الواضح أن f غامر. ليكن:

$$\sum_i (a_i/s_i)\otimes_R m_i\in R_S\otimes M$$

إذا كان $S \ni s = \prod_i s_i$ ، $t_i = \prod_{j\neq i} s_i$ ، فإن:

$$\sum_i \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_i \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum 1/s \otimes a_i t_i m$$
$$= 1/s \otimes \sum_i a_i t_i m$$

وبالتالي كل عنصر من $R_S \otimes M$ هو من الشكل $1/s \otimes m$. ليكن الآن $f((1/s) \otimes m) = 0$. عندئذ، $m/s = 0$ ، وبالتالي $tm = 0$ من أجل كل t من S. لذلك:

$$1/s \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0$$

و f متباين. إذاً، f إيزومرفيزم. □

فرضية 11.3.6: ليكن N و M R − مودولين. يوجد إيزومرفيزم وحيد:

$$f : M_S \otimes_{R_S} N_S \xrightarrow{\sim} (M \otimes_R N)_S$$

حيث $f((m/s) \otimes_{R_S} (n/t)) = (m \otimes n)/st$. وبشكل خاص:

$$M_P \otimes_{R_P} N_P \cong (M \otimes_R N)_P, \quad \forall P \in \operatorname{Spec}(R)$$

البرهان: بحسب الفرضية 10.3.6 وخواص الجداء $\otimes$. □

6 – 4 الجداء التنسوري والمتواليات الصحيحة

نناقش في هذا البند سلوك الجداء التنسوري بالنسبة إلى متوالية صحيحة. من أجل هذا الهدف تلزمنا بعض النتائج والمصطلحات، نعرض فيما يلي بعضها.

ليكن $f : M \times N \to P$ R − تطبيقاً ثناخطياً. من أجل كل $x \in M$، يكون التطبيق $f_x : N \to P$ المُعرّف بالعلاقة $f_x(y) = f(x, y)$ R − خطياً. إذاً، f يُعرّف (يُعطي) تطبيقاً $M \to \operatorname{Hom}_R(N, P)$، وهو خطي لأن f كذلك بالنسبة إلى x:

$$x \mapsto f_x$$

بالعكس، أي R – هومومرفيزم $\phi : M \to \mathrm{Hom}_R(N,P)$ يُعرّف تطبيقاً تناخطياً على $M \times N$ بالعلاقة $(x,y) \mapsto \phi(x)(y)$. إذاً، يوجد تقابل 1 – 1 بين مجموعة التطبيقات R – تناخطية $\mathrm{Bil}(M \times N, P)$، S مثلاً، وبين $\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P))$. ومن ناحية أخرى، فإن:

$$S = \mathrm{Bil}_R(M \times N, P) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes N, P)$$

بحسب الفرضية 1.3.6. إذا، لدينا الإيزومرفيزم القانوني:

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P))$$

فتذكر!

إذا أعطينا R – هومومرفيزمين $f : M_1 \to M_2$ و $g : N_1 \to N_2$، نأخذ المخطط:

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times N_1 & \xrightarrow{\otimes_1} & M_1 \otimes N_1 \\ {\scriptstyle f \times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M_2 \times N_2 & \xrightarrow[\otimes_2]{} & M_2 \otimes N_2 \end{array}$$

حيث $f \times g$ هو الجداء الكارتيزي المُعرّف بالعلاقة:

$$(f \times g)(m_1, n_1) = (f(m_1), g(n_1))$$

عندئذ، يكون $\otimes_2 \circ (f \times g)$ تطبيقاً تناخطياً. وبالتالي يوجد R – هومومرفيزم $h : M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ يُكمل المخطط السابق إلى مخطط تبديلي. نُسمي هذا التطبيق الجداء التنسوري لـــ f و g ونرمز له بالرمز $f \otimes g$ (انظر التعريف 2.3.6).

إن خواص الجداء التنسوري لـــ R – هومومرفيزمات توجز في النظرية الآتية.

نظرية 1.4.6: (1): ليكن M و N R – مودولين. عندئذ:

$$\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes N}$$

(2) إذا كانت المتواليتان من R مودولات و R – هومومرفيزمات:

$$N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N'' \quad \text{و} \quad M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{f'} M''$$

فإن:

$$(f' \circ f)(g' \circ g) = (f' \otimes g')(f \otimes g)$$

البرهان: لنتأمل المخططين التاليين:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_N"'] & M \otimes N \arrow[d, dashed] \\
M \times N \arrow[r, "\otimes"'] & M \otimes N
\end{tikzcd}$$

و

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rrr, "\otimes"] \arrow[dr, "f \times g"] \arrow[dd, "(f' \circ f)(g' \circ g)"'] & & & M \otimes N \arrow[dl, "f \otimes g"'] \arrow[dd, dashed] \\
& M' \times N' \arrow[r, "\otimes"] & M' \otimes N' & \\
M'' \times N'' \arrow[ur, "f' \times g'"'] \arrow[rrr, "\otimes"'] & & & M'' \otimes N'' \arrow[ul, "f' \otimes g'"]
\end{tikzcd}$$

واستخدام حقيقة كون كل منهما يتمم (بواسطة الأسهم المنقطة) إلى مخطط تبديلي بطريقة واحدة وواحدة فقط. □

فرضية 2.4.6: لتكن:

$$S : M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

متوالية قصيرة صحيحة من R – مودولات ومن R – هومومرفيزمات، وليكن N R – مودولاً كيفياً، عندئذ، تكون المتوالية:

$$S\otimes N: M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}} M''\otimes N \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

صحيحة (حيث id هو التطبيق المتجانس على N).

البرهان: بما أن $g\circ f = 0$، فإننا نستنتج من النظرية 1.4.6، أن:

$$(g\otimes \mathrm{id})\circ(f\otimes \mathrm{id}) = 0$$

وبالتالي، $\mathrm{Ker}(g\otimes \mathrm{id}) \supseteq \mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$. ليكن الآن:

$$\varphi: M\otimes N \to (M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$$

الهومومرفيزم الطبيعي. إن φ غامر كما نعلم. عندئذ، يوجد R – هومومرفيزم:

$$\psi: (M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id}) \to M''\otimes N$$

بحيث يكون $\psi\circ\varphi = g\otimes \mathrm{id}$. ولكن لبرهان أن:

$$\mathrm{Ker}(g\otimes \mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$$

يكفي أن نبرهن أن ψ متباين. ولبيان هذا يكفي إيجاد R – هومومرفيزم $\phi: M''\otimes N \to (M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$ بحيث يكون $\phi\circ\psi$ هو التطبيق المطابق على $(M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$.

سوف نبني هذا الهومومرفيزم ϕ كما يلي. إذا كان $m_1, m_2 \in M$، فإن:

$$\begin{aligned} g(m_1) = g(m_2) &\Rightarrow m_1 - m_2 \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \\ &\Rightarrow \exists m' \in M' :\ m_1 - m_2 = f(m') \\ &\Rightarrow \forall n \in N :\ m_1\otimes n = m_2\otimes n = f(m')\otimes n \in \mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id}) \end{aligned}$$

بما أن g غامر، نستطيع تعريف التطبيق:

$$\alpha: M''\times N \to (M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$$

بالعلاقة:

$$\alpha(m'', n) = (m\otimes n) + \mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$$

المحاضرة العاشرة

حيث $m\in M$ و $m''=g(m)$. إن α هو R − هومومرفيزم تناخطي، وبالتالي يوجد R − هومومرفيزم وحيد:

$$\phi: M''\otimes N \to (M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$$

بحيث يكون $\phi\circ\otimes=\alpha$. والآن من أجل كل $m\in M$ وكل $n\in N$، لدينا:

$$\begin{aligned}(\phi\circ\psi)((m\otimes n)+\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})) &= \phi((g\otimes \mathrm{id})(m\otimes n))\\ &=\phi(g(m)\otimes n)\\ &=(\phi\circ\otimes)(g(m),n)\\ &=\alpha(g(m),n)\\ &=m\otimes n+\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})\end{aligned}$$

بما أنه، عندئذ، $\phi\circ\psi$ يتطابق مع التطبيق المطابق على مجموعة مولدات $(M\otimes N)/\mathrm{Im}(f\otimes \mathrm{id})$، فإن $\phi\circ\psi$ يتطابق مع التطبيق المطابق على كامل هذا المودول.

لكي يكتمل البرهان، علينا أيضا أن نبين أن $g\otimes \mathrm{id}$ غامر. من أجل كل $m''\in M''$ يوجد $m\in M$ بحيث يكون $m''=g(m)$، وبالتالي $g\otimes \mathrm{id}$ غامر. □

هناك بالطبع نظرية مثنوية للنظرية 2.4.6، نصوغها فقط ونترك برهانها للقارئ.

فرضية 3.4.6: لتكن:

$$T: M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

متوالية قصيرة صحيحة من R − مودولات ومن R − هومومرفيزمات، وليكن N R − مودولاً كيفياً، عندئذ، تكون المتوالية:

$$N\otimes T: N\otimes M' \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} N\otimes M \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes g} N\otimes M'' \longrightarrow 0$$

صحيحة (حيث id هو التطبيق المتجانس على N). □

ملاحظات 4.4.6:

(1) ليكن $T(M)=M\otimes N$ و $U(P)=\mathrm{Hom}(N,P)$. عندئذ، تأخذ العلاقة:

$$\mathrm{Hom}(M\otimes N,P)\cong \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,P))$$

الشكل:

$$\mathrm{Hom}(T(M),P)\cong \mathrm{Hom}(M,U(P))$$

من أجل أي R – مودولين M و P، وبلغة "اللغو المجرد" يكون الفونكتر T مطاوراً للفونكتر U من اليسار و U مطاوراً لـ T من اليمين. ومن برهان الفرضية 2.4.6، ينتج أن أي فونكتر مطاور من اليسار هو أيضاً صحيح من اليمين. وبالمثل كل فونكتر مطاور من اليمين صحيح من اليسار.

(2) من الفرضيتين 2.4.6 و 3.4.6، نجد أن الجداء التنسوري بـ N يحافظ على صحة متوالية قصيرة صحيحة، بشكل عام. وكمثال على ذلك، نأخذ المثال الآتي.

مثال 5.4.6: إن المتوالية:

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}\xrightarrow{\ f\ }\mathbb{Z}\xrightarrow{\ \varphi\ }\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

حيث $f(n)=2n$ من أجل كل $n\in\mathbb{Z}$. لنتأمل الآن المتوالية الصحيحة الناتجة من هذه المتوالية بجدائها تنسورياً ومن اليسار بـ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\xrightarrow{\ \mathrm{id}\otimes f\ }\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}\xrightarrow{\ \mathrm{id}\otimes\varphi\ }\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

بما أن:

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes f)((m+2\mathbb{Z})\otimes n)&=(m+2\mathbb{Z})\otimes f(n)=(m+2\mathbb{Z})\otimes(2n)\\&=(m+2\mathbb{Z})\otimes m=0\otimes m=0\end{aligned}$$

فإنه ينتج أن $\mathrm{id}\otimes f$ تطبيق صفري، نواته، لذلك، هي $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$، وهي إيزومرفية إلى $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ بحسب الفرضية 4.3.6، وبالتالي، لا يمكن أن تكون مودولاً صفرياً. إذاً، $\mathrm{id}\otimes f$ غير متباين، والمتوالية الناتجة ليست صحيحة في $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}$.

وهنا يطرح السؤال نفسه، السؤال التالي: هل توجد حالات يكون من أجلها أن المتوالية الناتجة من المتوالية الصحيحة القصيرة:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M'' \longrightarrow 0$$

بعد ضربها تنسورياً (من اليسار، مثلاً) بالمودول N، صحيحة؟ إن الجواب هو في النظرية الآتية.

نظرية 6.4.6: ليكن N R – مودولاً، ولتكن:

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M'' \longrightarrow 0$$

متوالية صحيحة قصيرة منشطرة مؤلفة من R – مودولات ومن R – هومومرفيزمات. عندئذ، توجد المتوالية الصحيحة القصيرة المنشطرة الناتجة من المتوالية السابقة:

$$0 \longrightarrow N \otimes M' \xrightarrow{\ \mathrm{id} \otimes f\ } N \otimes M \xrightarrow{\ \mathrm{id} \otimes g\ } N \otimes M'' \longrightarrow 0$$

البرهان: بحسب الفرضية 3.4.6، يكفي برهان أن $\mathrm{id} \oplus f$ متباين. ليكن $f^0 : M \longrightarrow M'$ حيث $f^0 \circ f = \mathrm{id}_{M'}$ (أي أن f^0 هو الهومومرفيزم المشطر أو الشاطر بالنسبة إلى f، والموجود بحسب الفرض). نُعرّف التطبيق:

$$\alpha : N \times M \to N \otimes M'$$

بالعلاقة $\alpha(n,m) = n \otimes f^0(m)$. بسهولة نجد أن α هو R – هومومرفيزم ثناخطي، وبالتالي يوجد R – هومومرفيزم وحيد:

$$\psi : N \otimes M \to N \otimes M'$$

حيث $\psi(n \otimes m) = n \otimes f^0(m)$ من أجل كل $M \ni m$ وكل $N \ni n$. إذا أعطينا الآن $N \ni n$ و $M' \ni m'$، فإن:

$$\begin{aligned}(\psi \circ (\mathrm{id} \otimes f))(n \otimes m') &= (\psi \circ (n \otimes f(m')) = n \otimes f^0(f(m')) \\ &= n \otimes m'\end{aligned}$$

وبالتالي $\psi\circ(\mathrm{id}\otimes f)$ هو تطبيق المطابق على $N\otimes M'$، ولذلك $\mathrm{id}\otimes f$ متباين. □

هناك، بالطبع، نظرية مثنوية للنظرية 6.4.6.

يوجد نمط خاص من المودولات إذا ضُربت تنسورياً بمتوالية صحيحة قصيرة فإنه ينتج متوالية صحيحة قصيرة. هذا النمط من المودولات سوف نناقشه بإيجاز في البند التالي.

6 – 5 المودولات المسطّحة

إن الفونكتر $T_N : M \to M\otimes_R N$ على مجموعة R – مودولات و R – هومومرفيزمات ليس، في الحالة العامة، صحيحاً كما وجدنا في المثال 5.4.6. إذا كان الفونكتر T_N صحيحاً، أي إذا كان الجداء تنسورياً بـــ N ينقل كل المتواليات الصحيحة إلى متواليات صحيحة، فإن المودول N يسمى مودولاً مسطحاً.

تعريف 1.5.6: يُسمى R – مودول N مودولاً مسطحاً، إذا نتج من أجل كل مونومرفيزم R – مودولات $f: M' \to M$ أن الهومومرفيزم $f\otimes \mathrm{id}: M'\otimes N \to M\otimes N$ هو أيضاً مونومرفيزم.

فرضية 2.5.6: كل حلقة تبديلية بواحدة 1، هي R – مودول مسطح.

البرهان: بحسب الفرضية 4.3.6، يوجد الإيزومرفيزم $\phi_M : M \xrightarrow{\sim} R\otimes M$ المعرف بالعلاقة $m\mapsto 1\otimes m$. من كل R – هومومرفيزم لدينا المخطط التبديلي:

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{M'}"'] & M \arrow[d, "\phi_M"] \\ R\otimes M' \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"'] & R\otimes M \end{tikzcd}$$

والذي يؤدي إلى $\mathrm{id}\otimes f = \phi_M \circ f \circ \phi_{M'}^{-1}$. إذاً، إذا كان f مونومرفيزماً، فإن $\mathrm{id}\otimes f$ مونومرفيزم. □

إن النظرية الآتية تبين العلاقة بين الجداء التنسوري والمجموع المباشر.

نظرية 3.5.6: لتكن $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات، و RM – مودولاً. عندئذ، $(M\otimes(\oplus_{i\in I}M_i))_i$ ؛ $(\mathrm{id}_M\otimes\mathrm{in}_i)_{i\in I}$ هو المجموع المباشر (الجداء العكسي) للأسرة $(M\otimes M_i)_{i\in I}$.

البرهان: سوف نستخدم الإيبيمورفيزمات القانونية $p_j:\oplus_{i\in I}M_i\to M_j$ والمونومرفيزمات القانونية $q_j:M_j\to\oplus_{i\in I}M_i$ المحققة لشروط النظرية 13.6.1.

من أجل كل $j\in I$ نتأمل R – هومومرفيزمات:

$$\alpha_j=\mathrm{id}_M\otimes p_j:M\otimes\bigoplus_{i\in I}M_i\to M\otimes M_j$$

$$\beta_j=\mathrm{id}_M\otimes q_j:M\otimes M_j\to M\otimes\bigoplus_{i\in I}M_i$$

عندئذ، ينتج مباشرة من النظرية 1.4، أن:

$$\alpha_k\circ\beta_j=\begin{cases} id_{M\otimes M_j}, & k=j\\ 0 & , k\neq j\end{cases}$$

والآن، إذا كان $m\in M$ و $(m_i)_{i\in I}\in\oplus_{i\in I}M$، فإننا نرى من:

$$\alpha(m\otimes(m_i)_{i\in I})=m\otimes p_j(m_i)_{i\in I}$$

ومن أن $m\otimes p_j(m_i)_{i\in I}$ يساوي الصفر ما عدا من أجل عدد محدود من $j\in I$، أن $\alpha(m\otimes(m_i)_{i\in I})$ يساوي الصفر ما عدا من أجل عدد محدود من $j\in I$. أضف إلى ذلك أن:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}(\beta_j\circ\alpha_j)(m\otimes(m_i)_{i\in I})&=m\otimes\sum_{j\in I}(q_j\circ p_j)(m_i)_{i\in I}\\&=m\otimes(m_i)_{i\in I}\end{aligned}$$

والمطلوب ينتج بواسطة النظرية 13.6.1. □

المحاضرة الحادية عشرة

نتيجة 4.5.6: إذا كانت $(M_i)_{i\in I}$ أسرة R – مودولات، و M R – مودولاً، عندئذ، يوجد R – إيزومرفيزم:

$$M\otimes(\oplus_{i\in I}M_i)\cong\bigoplus_{i\in I}(M\otimes M_i)$$

البرهان: ينتج مباشرة بواسطة 10.6.1. □

نجمع أهم خواص المودول المسطح في النظرية الآتية والتي تعطي تعاريف متكافئة للمودول المسطح.

نظرية 5.5.6: ليكن N R – مودولاً. إن الفرضيات الآتية متكافئة:

(1) N مودول مسطح (الفونكتر T_N صحيح).

(2) إذا كانت $0\to M'\to M\to M''\to 0$ متوالية صحيحة من R – مودولات وR – هومومرفيزمات، فإن ضربها تنسورياً بـــ N يعطي المتوالية الصحيحة:

$$0\to M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N\to 0$$

(3) إذا كان $f:M'\to M$ متبايناً، فإن $f\otimes id:M'\otimes N\to M\otimes N$ متباين (التعريف 1.5.6).

(4) إذا كان $f:M\to M'$ متبايناً و M و M' منتهي التوليد، فإن $f\otimes id:M'\otimes N\to M\otimes N$ متباين.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): ينتج مباشرة من التعريف بتجزئة متوالية صحيحة طويلة إلى متواليات صحيحة أقصر.

(2) $\Leftrightarrow$ (3): ينتج من الفرضية 2.4.6.

(3) $\Leftrightarrow$ (4): واضح جداً.

(4) $\Leftrightarrow$ (3): ليكن $f:M\to M'$ متبايناً:

$$a=\sum x_i'\otimes y_i\in\mathrm{Ker}(f\otimes\mathrm{id})$$

وبالتالي:

$$0=(f\otimes\mathrm{id})(a)=(f\otimes\mathrm{id})\left(\sum x_i'\otimes y_i\right)=\sum f(x_i')\otimes y_i$$

في $M\otimes N$. ليكن M_0' مودولاً جزئياً في M' مولداً بالعناصر x_i'، وليكن $a_0=\sum x_i'\otimes y_i$ كعنصر من $M_0'\otimes N$. ليكن $f_0:M_0'\to M_0$ مقصور f على M_0'. وهذا يعني أن $(f_0\otimes\mathrm{id})(a_0)=0$. بما أن M_0' و M_0 منتهيا التوليد، $f_0\otimes\mathrm{id}$ متباين، ولذلك $a_0=0$، فإن $a=0$. □

نتيجة 6.5.6: كل مودول إسقاطي P هو مودول مسطح.

البرهان: بحسب النظرية 4.6.5، P حد مباشر في R – مودول حر F. وبما أن $F\cong\oplus_{i\in I}R_i$، حيث $R_i=R$. بحسب الفرضية 2.5.6، R هي R – مودول مسطح، وبحسب النظرية 5.5.6، F مودول مسطح. إذاً، P مودول مسطح. □

نتيجة 7.5.6: ليكن $M=\oplus_{i=1}^{n}M_i$. عندئذ، $R\ M$ – مودول مسطح ⇔ $R\ M_i$ – مودول مسطح من أجل كل $i=1,\cdots,n$.

البرهان: نجري الاستقراء بحسب n، ولذلك يكفي البرهان من أجل $n=4$. إذا كان $M=M_1\oplus M_2$، فإننا نحصل على المتوالية القصيرة الصحيحة:

$$0\longrightarrow M_1\xrightarrow{q_1}M\xrightarrow{p_1}M_2\longrightarrow 0$$

ثم نطبق النظرية 5.5.6. إذا كان $2<n$، والمطلوب صحيح من أجل مجموع مباشر عدد حدوده أقل من n، فإننا نأخذ المتوالية الصحيحة:

$$0\to M_1\to\oplus_{i=1}^{n}M_i\to\oplus_{i=2}^{n}M_i\to 0$$

ونطبق النظرية 5.5.6. □

فرضية 8.5.6: لتكن R حلقة كيفية، و $R\ M$ – مودولاً. إن الشروط التالية متكافئة:

(1) M مسطح.

(2) M_P مسطح من أجل كل $P \in \mathrm{Spec}(R)$.

(3) $M_{\mathfrak{M}}$ مسطح من أجل كل $\mathfrak{M} \in \mathrm{Max}(R)$.

البرهان: (1) $\Leftarrow$ (2): بحسب الفرضية 10.3.6، لدينا:

$$M_{R_P} \cong R_P \otimes_R M \cong M_P$$

هو R_P مودول.

(2) $\Leftarrow$ (3): واضح لأن كل إيديال أعظمي هو إيديال بسيط.

(3) $\Leftarrow$ (1): إذا كان $N \to P$ هو هومومرفيزم R – مودولات و $\mathfrak{M}$ إيديالاً أعظمياً في R، فإن $N \to P$ متباين $\Leftarrow$ $N_{\mathfrak{M}} \to P_{\mathfrak{M}}$ متباين، بحسب الفرضية 11.7.4 $\Leftarrow$ $N_{\mathfrak{M}} \otimes M_{\mathfrak{M}} \to P_{\mathfrak{M}} \to M_{\mathfrak{M}}$ متباين بحسب الفرضية 8.5.6 $\Leftarrow$ $(N \otimes_R M)_{\mathfrak{M}} \to (P \otimes_R M)_{\mathfrak{M}}$ متباين بحسب الفرضية 11.3.6 $\Leftarrow$ $N \otimes_P M \to P \otimes_R M$ متباين بحسب النظرية 11.7.4. إذا، M مودول مسطح بحسب الفرضية 8.5.6. □

6 – 6 الجداء التنسوري للجبور

نذكر بتعريف الجبر (انظر التعريف 3.2.1).

في هذا البند، جميع الحلقات هي حلقات تبديلية بواحدة ما لم يذكر خلاف ذلك.

لتكن R – حلقة. نُسمي R – جبراً (أو جبرا فوق R) المودول A بالإضافة إلى التطبيق $A \times A \to A$، ونرمز له بالرمز $(x,y) \mapsto xy$، وتُسمى هذه العملية جداءً داخلياً على A وبحيث يتحقق قانون التوزيع على الجمع، و:

$$r(xy) = (rx)y = x(ry)$$

بفرض شروط على الجداء في التعريف أعلاه نحصل على أنماط مختلفة من الجبور: مثلاً:

– إذا كان الجداء تجميعياً، فإن الجبر A يُسمى جبراً تجميعياً (لاحظ أن A يكون حلقة في هذه الحالة بالنسبة إلى عملية الجمع وعملية الجداء في A).

– إذا كان الجداء تبديلياً، فإن الجبر A يسمى جبراً تبديلياً.

- إذا وجدت واحدة جداء، فإن A يسمى جبراً واحدياً أو جبراً وحدوياً (أو جبراً بواحدة).
- يسمى الجبر التجميعي الوحدوي حيث لكل عنصر مختلف عن الصفر فيه مقلوب (معكوس، نظير) جبر قسمة، مثلاً، $\mathbb{C}$ هو جبر قسمة فوق $\mathbb{R}$.

غالباً ما يؤخذ التعريف الآتي لـ R - جبر A.

ليكن $f: R \to A$ هومومرفيزم حلقات حيث $C(A) \supseteq f(R)$ مركز A، أي أن $f(r)$ متبادل مع جميع عناصر A مهما يكن $R \ni r$. يمكننا اعتبار A R - جبراً بتعريف عمل R على A بالتطبيق:

$$(r,a) \mapsto f(r)a$$

من أجل كل $R \ni r$ وكل $A \ni a$.

إن شروط تعريف المودول محققة وضوحاً، وقانون الجداء $A \times A \to A$ تشاخطي وضوحاً أيضاً. إذاً، الهومومرفيزم f هو جزء من بناء الجبر A فوق $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(R)$ والتي هي حلقة جزئية في A.

إن تعريف الجداء $r \cdot a = f(r)a$ من أجل كل $R \ni r$ وكل $A \ni a$ هو الذي جعل A R - مودولا. إذاً، لـ A بنيتان: بنية حلقية وبنية R - مودولية. وهاتان البنيتان متلائمتان (متوافقتان) بالمعنى الذي يكون القارئ قادراً على صياغته بنفسه. إذاً، يجب أن لا ننسى أن R - جبرا A هو بالتعريف حلقة بالإضافة إلى هومومرفيزم حلقات $f: R \to A$. فتذكر!.

بشكل خاص، إذا كانت الحلقة R حقلاً F و $A \neq 0$، فإن f متباين، وبالتالي نستطيع مطابقة F بصورته $f(F)$ في A. إذاً، F حقل جزئي في A. وبعبارة أخرى، إن F - جبراً هو حلقة A تحوي F كحلقة جزئية في A.

إذا كانت R حلقة بواحدة 1، فإنه يوجد هومومرفيزم وحيد $f: \mathbb{Z} \to A$ مُعرّف بالعلاقة $f(n) = n \cdot 1$. إذاً، كل حلقة بواحدة هي $\mathbb{Z}$ - جبر.

ليكن $f: R \to A$ و $g: R \to B$ هومومرفيزمي حلقات. نسمي R - هومومرفيزم جبور $h: A \to B$ إذا كان هومومرفيزم حلقات و R - هومومرفيزم

المحاضرة الثانية عشرة

موديولات أيضاً. وعندها يكون $h\circ f=g$. يُقال إن هومومرفيزم الحلقات $f:R\to R'$ منتهٍ وأن R' هي R – جبراً منتهياً إذا كان R' R – مودولاً منتهي التوليد.

إن الهومومرفيزم f يكون منتهياً (أو من نمط منتهٍ) و R' R – جبراً منتهي التوليد إذا وجدت مجموعة منتهية من العناصر $\{a_1,\cdots,a_n\}$ من R' حيث كل عنصر من R' يكتب ككثير حدود بـ $a_1,\cdots,a_n$ بأمثال من $f(R)$. وبعبارة أخرى، إذا وجد R – هومومرفيزم جبور من حلقة كثيرات الحدود $R[x_1,\cdots,x_n]$ في R'.

يُقال إن الحلقة R منتهية التوليد إذا كانت منتهية التوليد كـ $\mathbb{Z}$ – جبر. وهذا يعني أنه يوجد عدد محدود من العناصر $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ من R بحيث يكون كل عنصر من R يكتب ككثير حدود بـ $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ بأمثال هي أعداد صحيحة.

إذا كان F حقلاً ما و A F – جبراً، نقول إن A محدود القياس فوق F إذا كان كفراغ شعاعي محدود القياس فوق F.

لنعط الآن بعض الأمثلة على الجبور.

أمثلة 1.6.6:

1. إن $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ – جبر و $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$. كما أن Q_8 $\mathbb{R}$ – جبر و $\dim_{\mathbb{R}}(Q_8)=4$.
2. $M_n(F)$ F – جبر من قياس n^2.
3. الحلقة $F[x]$ F – جبر لانهائية القياس.
4. ليكن R F – جبرا مختلفا عن الصفر. نُعرّف التطبيق $\sigma:F\to R$ بالعلاقة $\sigma(a)=a\cdot 1$، حيث 1 واحدة الجداء في R. إن σ هومومرفيزم حلقات، لأن:

$$\sigma(a+b)=(a+b)\cdot 1=a\cdot 1+b\cdot 1=\sigma(a)+\sigma(b)$$
$$\sigma(ab)=(ab)\cdot 1^2=(a\cdot 1)(b\cdot 1)=\sigma(a)\sigma(b)$$

إن $F\neq \mathrm{Ker}(\sigma)$ لأن $\sigma(1)=1\neq 0$؛ بما أن F حقل، فإن $\mathrm{Ker}(\sigma)=0$. إذاً، σ متباين. ليكن $\sigma(F)\ni\sigma(a)$ عنصراً كيفياً. عندئذ:

$$r(\sigma(a)) = r(a\cdot 1) = a(r\cdot 1) = ar = a(1\cdot r) = (a\cdot 1)r = (\sigma(a))r$$

إذاً، $C(R) \supseteq \sigma(F)$، مركز R. إذاً، $\sigma(F)$ حقل إيزومرفي إلى F محتوى في مركز R، والجداءات السلمية متوافقة $ar = (a\cdot 1)r$. إذاً، نستطيع اعتبار F حقلاً جزئياً في مركز F – جبر.

إذا كان R F – جبراً و $\{u_1,\cdots,u_n\}$ قاعدة A فوق F. توجد العناصر $F \ni c_{ijk}$ بحيث يكون:

$$u_i u_j = \sum_k c_{ijk} u_k$$

تُسمى هذه المعادلات المعادلات المُعرّفة لـ A لأنها تُعرّف الجداء في A. بالحقيقة:

$$\left(\sum_i a_i u_i\right)\left(\sum_j b_j u_j\right) = \sum_k \left(\sum_{i,j} a_i b_j c_{ijk}\right) u_k \qquad (*)$$

بالعكس، إذا كان A فراغاً شعاعياً فوق الحقل F، قاعدته $\{u_1,\cdots,u_n\}$، وإذا كانت $F \ni c_{ijk}$ معطاة من أجل كل i و j و k، نستطيع تعريف الجداء في A بالعلاقة (*). عندئذ، من أجل كل اختيار لـ c_{ijk}، من السهل التحقق من:

(1) $r(s+t) = rs + rt$ و $(s+t)r = sr + tr$.

(2) $(ar)s = a(rs) = r(as)$.

من أجل كل $A \ni s,r$ و $F \ni a$.

لنفرض الآن أن اختيار العناصر c_{ijk} تم بشكل أن:

$$u_i(u_j u_k) = (u_i u_j)u_k \ , \ \forall\, i,j,k = 1,\cdots,n$$

عندئذ، بحساب روتيني نجد أن:

(3) $r(st) = (rs)t$ من أجل كل $A \ni t,s,r$.

إذاً، A F – جبر. إذا كان $A \ni 1$، حيث $1\cdot u_i = u_i = u_i \cdot 1$ من أجل كل i، فإن 1 هو واحدة A و A هي F – جبر.

نجمع هذه المناقشة في النظرية الآتية.

نظرية 2.6.6: ليكن A فراغاً شعاعياً فوق الحقل F، قاعدته $\{u_1,\cdots,u_n\}$. إذا أعطينا العناصر $c_{ijk} \in F$، $i,j,k=1,\cdots,n$، نُعرّف الجداء على A بالعلاقة (*). بشكل خاص، العلاقات المُعرّفة هي:

$$u_i u_j = \sum_k c_{ijk} u_k$$

عندئذ A F – جبر $\Leftrightarrow$ تختار العناصر c_{ijk} بحيث تتحقق:

$$u_i(u_j u_k) = (u_i u_j) u_k$$

من أجل كل i و j و k. وفي هذه الحالة تكون العلاقة (*) هي الجداء الوحيد المحقق لشروط تعريف الحلقة وإلى الشروط:

$$(au_i)(bu_j) = abu_i u_j \quad , \ \forall\, i,j \in A, \forall a,b \in F$$

يكون العنصر $1 \in A$ واحدة لـ A $\Leftrightarrow$ $1\cdot u_i = u_i = u_i \cdot 1$ من أجل كل $i=1,\cdots,n$.

البرهان: قبل نص النظرية. □

بعد هذه الجولة من التعاريف والمصطلحات والأمثلة ننتقل إلى مناقشة ما نريده في هذا البند. وأعني به الجداء التنسوري للجبور.

ليكن A و B R – جبرين، $f: R \to A$ و $g: R \to B$ الهومومرفيزمين الموافقين. بما أن كلا من A و B R – مودول، فإننا نستطيع تشكيل (بناء) جدائهما التنسوري $C = A \otimes_R B$ والذي هو R – مودول. سوف نُعرّف حالاً عملية جداء على هذا المودول C. لدينا تطبيق 4 – خطي:

$$A \times B \times A \times B \to A \otimes B$$

مُعرّف بالعلاقة:

$$(a,b,a',b') \mapsto aa' \otimes bb'$$

عندئذ، نحصل على R – تطبيق خطي:

$$A\otimes B\otimes A\otimes B\to A\otimes B$$

وبالتالي على تطبيق ثناخطي:

$$(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)\to A\otimes B$$

مُعرّف بالعلاقة:

$$(a\otimes b,a'\otimes b')\mapsto aa'\otimes bb'$$

من الواضح أن قانون التشكيل على $A\otimes B$ والذي عرفناه للتو هو قانون تجميعي. توجد واحدة $1\otimes1$ في $A\otimes B$. لدينا هومومرفيزما حلقات:

$$\alpha:A\to A\otimes B \quad \text{حيث} \quad a\mapsto a\otimes1$$

$$\beta:B\to A\otimes B \quad \text{حيث} \quad b\mapsto1\otimes b$$

إذاً، لقد عرفنا عملية جداء على $A\otimes B$ بالعلاقة:

$$(a\otimes b,a'\otimes b')=aa'\otimes bb'$$

وبشكل عام:

$$\left(\sum_i a_i\otimes b_i\right)\left(\sum_i a'_i\otimes b'_i\right)=\sum(a_ia'_i\otimes b_ib'_i)$$

عندئذٍ، $A\otimes B$ بالنسبة إلى عملية الجداء هذه، حلقة تبديلية بواحدة $1\otimes1$، يضاف إلى ذلك أن $A\otimes B$ R – جبر، لأن التطبيق $R\to A\otimes B$ المُعرّف بالعلاقة $r\mapsto f(r)\otimes g(r)$ يُعرّف على $A\otimes B$ R – بنية جبرية. عندئذٍ، يوجد المخطط التبديلي:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
R \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & A\otimes B \\
 & B \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & f(r) \arrow[dr, mapsto, "\alpha"] & \\
r \arrow[ur, mapsto, "f"] \arrow[dr, mapsto, "g"'] & & (f(r)\otimes1)(1\otimes g(r)) \\
 & g(r) \arrow[ur, mapsto, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

المحاضرات الثالثة عشر والرابعة عشر :

شرح التمارين المحلولة للفصول الرابع والخامس والسادس و حل التمارين الغير محلولة لها